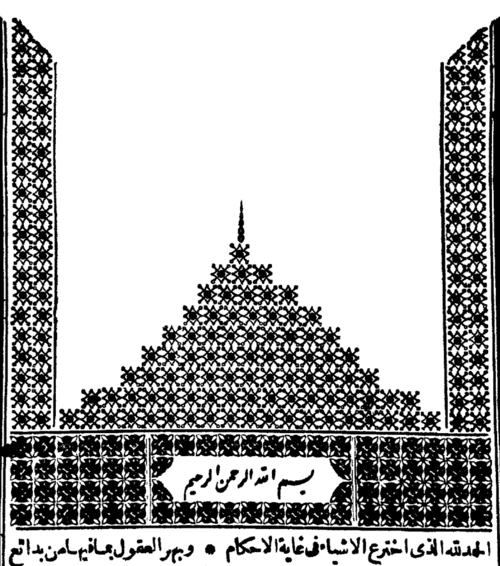




الحمد لله الذى اخترع الاشياء فى غاية الاحكام * وبهر العقول بما فيها من بدائع
الانتظام * ألم تر الى السماء كيف بناها * رفع سمكها بلا عمد فسواها * واغطش
ليلها واخرج ضحاها * والارض بعد ذلك دحاها * اخرج منها ماءها ومرعاها *
والجبال أرساها * ان فى ذلك لآيات لاولى الالباب * وارشادات عن اهل الخطا
الى منار الصواب * والصلاة والسلام على منبع ينابيع الحكمة والكمال *
ومسقط نقطة قلم الرسالة والجلال * مركز دائرة الوجود * ومطلع شمس التقى
والجود * سيدنا محمد الذى بعث باشكال الفضائل رحمة للعالمين * وعلى آله
الذين تنزه جوهر عنصرهم عن عرض يشين * (أما بعد) فيقول العائذ بربه من كل
وصمه * المعتمد عليه فى جميع شؤنه محمد عصمته * انه لما صدر الامر الواجب
الامتثال * من سدة صاحب السعادة والاقبال * سيف الله فى ارضه * القائم
به بسنته وفرضه * رئيس رؤساء العساكر الجهاديه * وطراز العصابة المحمديه *

حضرة الجناب الاكرم * والوزير الافخم * الحاج ابراهيم باشا صاحب الفتوحات * والنصر الذى لم يزل منشور الرايات * سلالة الجناب المعظم * والخديوى الاعظم * الذى ادنى مناقبه اخرس البلغاء عن مقال * وان حسن فى ذلك قول من قال

ماذا أقول وكيف القول فى ملك * قد فاق كل ملوك الاعصر الاول
محمدا انت ان احمد لك مبتهلا * وان طلبت لك العلياء أنت على

كيف لا وقد تغنت بمدحه الورق على اغصان الايك * وكان ذلك الامر صادرا الى حضرة أمير اللواء ادهم بيك * حبر العلوم الرياضية * ومدير عموم المهمات الحربيه * ومركز دوائر افلاك الصناعات العلمية والعملية * ومضمون ذلك الامر انه يترجم كتاب اصول الهندسه * الجامع لملخص ما وضعه كل مهندس من القدماء وأسسه * الذى ألفه فيلسوف زمانه * وفريد نظرائه واقرانه * المهندس لژاندر المشهور بباراضى فرانسا وان تكون ترجمته من اللغة الفرنساويه * الى اللغة التركيه * وذلك لما اشتمل عليه من كثرة المعانى * وقلة الالفاظ والمبانى * مع ما اختص به من حسن الترتيب * وسهولة الاسلوب الغريب وان ينتخب لتعليمه اثنى عشر نحريرا من اوردى الرجال * يكون ثاقب فكرهم فى غاية الجودة والكمال * فبادر حضرة البيك المومى اليه بامتثال ذلك الامر وسارع فى انتخاب الجماعة موافقين لعدة الشهور فى القدر * وشرع فى الترجمة والتعليم * وتحقيق معانى ذلك الكتاب على طريق مستقيم * وكنت ممن انتظم فى سلك أولئك الجماعة * وحصل كل منا على قدر ماله من البراعه * ثم أمر حضرة المشار اليه ان يترجم من اللغة التركيه * الى اللغة العربيه * ليعم نفعه جميع الانام * ويكون زيادة فى قوة الاسلام * وكنت بحمد الله اتقنت درايته غاية الاتقان * بما أوضحه حضرة البيك المشار اليه من بديع البيان * لانى حالة التعليم جعلت آذانى صدفا لالآلى كلمه * وقلبى وعاء لالتقاط الدر من فمه * فبادرت الى ترجمته كما أمر * مستعينا بخالق القوى والقدر * وهذا أوان الشروع فى المرام * ونسال الله حسن الختام *

(مقدمة)

هذا الكتاب يشتمل على ثمان مقالات الاربع الاوليات منها يبحث فيها عن الاشكال المسطحة والخطوط المرسومة على السطوح المستوية والمقالة الاولى لها ملحقات اخذت من اصول المهندس لاقوروا وهو من اشهر مهندسي فرانسا لكونها سهلة على المبتدى واندرجت عقبها وسميت ملحقات المقالة الاولى والمقالة الثانية يبحث فيها عن تعريف الدوائر ومقادير الزوايا والمقالة الثالثة يبحث فيها عن المثلثات المتشابهة ويذكر في حدودها بعض خصائص النسبة والتناسب ويذكر أيضا في بعض نتائج دعاواها من علم الجبر والمقابلة مايدل على ان برهان الهندسة قطعي والمقالة الرابعة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المنتظمة والدوائر ومايليها والمقالة الخامسة يبحث فيها عن السطوح المستوية والزوايا المجسمة والمقالة السادسة يبحث فيها عن الاجسام المحاطة بسطوح مستوية والمقالة السابعة يبحث فيها عن المثلثات الكروية ومايخصها من التفاصيل والمقالة الثامنة يبحث فيها عن الاجسام المحاطة بسطوح منحنية ولكل من الثمان مقالات دعاوى عملية مثبتة بواسطة الدعاوى النظرية فبعض الدعاوى العملية يأتي مستقلا عقب مقالته وبعضها مندرج في مقالته ومن اجل اشتمال هذه الاصول على البراهين القطعية المحدة للاذهان كان كل طالب علم في تلك الديار واجبا عليه ان يطلع عليها لما فيها من توسعة ميادين الافهام * وتدريبها على ادراك اسرار معاني الكلام * وتقوية العقول وتصفية الافكار * وجودة القرائح ودقة الانظار * حتى ان أهل تلك الديار يرون انها اولى ما لقنوه الصبيان * ويحافظون على دراستها محافظتنا على تلاوة ام القرآن

يقول الفقير على افنـدى عزت في هذه الطبعة الثالثة قد حذفت ملحقات المقالة الاولى ونصفها الاخير وجعلت بدلهما النصف الاخير من المقالة الاولى من كتاب المهندس بلقنش لكونها سهلة جدا على المبتدى اه

هذا كتاب النخبة العزية

فى تهذيب الاصول الهندسية

ف أصل هذا الكتاب فيلسوف زمانه وفريد نظرائه وأقرانه من هو للذكاء

اوى المهندس الشهير لجاندر الفرنساوى

ه الطبعة الثالثة بأمر سعادة مدير المدارس الملكية والاشغال العمومية

على باشا مبارك وتنقيح معلم علم الاستاتيك وعلم الديناميك وعلم

ولك بمدرسة المهندسخانة الخديوية حضرة على أفندى عزت وتصحيح

بالمطبعة السنية حضرة الشيخ ابراهيم عبد الغفار الدسوقى

بالمطبعة الكبرى ببولاق سنة ١٢٨٨ هجرية على صاحبها أفضل الصلاة

وأزكى التحية

(المقالة الاولى من اصول الهندسة)

(بيان الحدود الاصلية)

١ الهندسة علم يبحث فيه عن مقدار الامتداد اى مساحته والامتداد هو الابعاد الثلاثة وهى الطول والعرض والارتفاع أو العمق

٢ الخط طول بلا عرض ولا عمق وكل من نهايتى الخط يسمى نقطة والنقطة لا امتداد لها

٣ الخط المستقيم هو أقرب بعد بين النقطتين

٤ كل خط ليس مستقيما ولا مركبا من خطوط مستقيمة فهو خط منحن والخط الذى يتركب من خطوط مستقيمة فهو خط منكسر ففى (شكل ١) خط ا ب يسمى مستقيما وخط ا ح د ب يسمى منكسرا وخط ا هـ ب يسمى منحنيا

٥ السطح ماله طول وعرض فقط

٦ السطح المستوى هو السطح الذى يمكن ان ينطبق عليه خط مستقيم فى أى جهة من جهاته انطباقا تاما

٧ كل سطح ليس مستويا ولا مركبا من سطوح مستوية فهو سطح منحن

٨ الجسم ماله ابعاد ثلاثة الطول والعرض والعمق

٩ (شكل ٢) الزاوية هى الانفراج الحاصل من تلاقى خطين مستقيمين الانفراج مثلا الذى بين خطى ا ب و ا ح يسمى زاوية ونقطة ا التى هى ملتقى الخطين تسمى رأس الزاوية وخطا ا ب و ا ح يسميان ضلعا الزاوية

الزاوية تارة تذكر بحرف ا وحده وهو الذى عند رأسها وتارة تذكر بثلاثة حروف بحيث يكون الحرف الذى يذكر متوسطا دالا على رأس الزاوية مثل ب ا ح و ح ا ب

الزوايا تقبل الجمع والطرح والضرب والقسمة كسائر المقادير مثلا زاوية د ح هـ هى مجموع زاويتى د ح ب و ب ح هـ وزاوية د ح ب هى

ل زوايتي د ح هـ و ب ح هـ (شكل ٢)

١٠ اذا تساوت زاويتا ب ا ح و ب ا د المتجاورتان الحادثتان بجانبي خط ا ب المتلاقي بخط ح د فكل واحدة من هاتين الزاويتين تسمى قائمة ويقال ان خط ا ب عمود على ح د (شكل ٣)

١١ الزاوية الحادة ما كانت أصغر من القائمة نحو زاوية ث ا ح والمنفرجة ما كانت أكبر من القائمة نحو زاوية د هـ و (شكل ٤)

١٢ الخطان المتوازيان خطان في مستو واحد لا يلتقيان أصلا اذا امتدا مثل خطي ا ب و ح د (شكل ٥)

١٣ الشكل المستوى هو سطح مستو أحيطت جميع أطرافه بخطوط فان كانت تلك الخطوط مستقيمة يسمى ذلك الشكل شكلا مستقيم الاضلاع أو مضلعا مستويا وتسمى تلك الخطوط محيط الشكل أو أضلاع الشكل (شكل ٦)

١٤ ابسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ما كان ذا ثلاثة أضلاع ويسمى مثلثا وان كان الشكل المستقيم الاضلاع أربعة أضلاع يسمى ذا أربعة أضلاع وان كانت أضلاعه أكثر من أربعة يسمى كثير الاضلاع فان كان كثير الاضلاع ذا خمسة أضلاع يسمى مخمسا وان كان ذا ستة يسمى مسدسا وان كان ذا سبعة يسمى مسبعا وهكذا الخ

١٥ المثلث يسمى متساوى الاضلاع اذا تساوت أضلاعه الثلاثة (شكل ٧) ومتساوى الساقين اذا تساوى ضلعاه فقط (شكل ٨) ومختلف الاضلاع اذا اختلفت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩)

١٦ المثلث يسمى قائم الزاوية اذا كانت احدى زواياه قائمة والضلع الذى يقابل تلك القائمة يسمى وتر القائمة فلهذا مثلث ا ب ح الذى زاويته ا قائمة يسمى مثلثا قائم الزاوية وضلع ب ح وتر القائمة (شكل ١٠)

١٧ لنذكر انواع الشكل المسمى ذا أربعة أضلاع فنقول

منه المربع وهو ما كانت جميع أضلاعه متساوية وزواياه قائمة (شكل ١١) ومنه المستطيل وهو ما كانت أضلاعه المتجاورة مختلفة وكانت جميع زواياه

قائمة (شكل ١٢)
ومنه المتوازى الاضلاع وهو ما كانت أضلاعه المتقابلة متوازية (شكل ١٣)
ومنه المعين وهو ما كانت أضلاعه متساوية بدون ان تكون زواياه قائمة (شكل ١٤)
ومنه شبه المنحرف وهو ما كان فيه ضلعان متوازيان فقط (شكل ١٥)

١٨ الخط المستقيم الموصول بين زاويتى ذى أربعة أضلاع أو كثير الاضلاع دون المتجاورتين يسمى قطر الشكل مثلا خط ا ح هو قطر (شكل ٢ ٤)

١٩ كل شكل مستقيم الاضلاع اذا تساوت أضلاعه يسمى متساوى الاضلاع ويسمى متساوى الزوايا اذا تساوت زواياه

٢٠ الشكلان المستقيما الاضلاع يسميان متساويى الاضلاع المتناظرة اذا تساوت أضلاعهما المتناظرة وكان كل منهما على نظم واحد يعنى اذا كان الضلع الاول من أحدهما مساويا للاول من الآخر والثانى للثانى والثالث للثالث وهكذا الخ ويسميان متساويى الزوايا المتناظرة اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة كالاضلاع وبهذين الوجهين تسمى الاضلاع المتساوية أضلاعا متناظرة والزوايا المتساوية تسمى زوايا متناظرة

(تنبيه) الاربع المقالات الاول يبحث فيها عن الاشكال المسطحة والخطوط المرسومة على السطح المستوى

بيان الاصطلاحات والعلامات المشتمل عليها هذه الاصول

العلوم البديهية هى القضايا التى تكون بينة بنفسها أى لا تحتاج الى اثبات
الدعوى النظرية هى القضية المسلمة بواسطة البرهان
الدعوى العملية هى المسئلة التى يراد حلها بالعمل
الفائدة هى القضية المعينة على اثبات دعوة نظرية أو مسئلة
القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والفائدة
النتيجة هى الثمرة التى تظهر من قضية أو جملة قضايا تقدمت

التنبيه ما يفهم منه فائدة الدعوى التي تقدمت وارتباطها بغيرها وغايتها
الفروض هي الموضوعات التي تفرض في تقرير قضية أو في أثناء برهان

العلامات

هذه العلامة = تسمى علامة التساوي فكتابة ا = ب معناها ا تساوي ب وليبان ان مقدار ا أصغر من مقدار ب يكتب ا < ب وليبان ان ا أكبر من ب يكتب ا > ب

وهذه + العلامة تسمى علامة الزائد وتدل على الجمع وهذه الاشارة — تسمى علامة الناقص وتدل على الطرح فكتابة ا + ب تدل على حاصل جمع كميتي ا و ب وكتابة ا — ب تدل على فرقهما أي على الباقي من طرح الكمية ب من الكمية ا وكتابة ا — ب + ح أو ا + ح — ب تدل على انه ينبغي جمع ا و ح ثم طرح ب من حاصل جمعهما

وهذه × العلامة تدل على الضرب فلذا ا × ب يشير الى حاصل ضرب مقدار ا في مقدار ب وقد استعمل بعضهم نقطة عوضا عن تلك العلامة فهو ا . ب يعني ا × ب وقد يوضع ا ب بدون علامة الضرب وبدون نقطة بالاتصال فتدل على الضرب مثل ا ب يعني ا × ب وحينئذ لم يعن به الحرفان الدالان على نهايتي خط كما يقال خط ا ب وأيضا هذه الجملة أعني ا × (ب + ح — ى) تدل على حاصل ضرب مقدار ا في الكمية المركبة التي هي ب + ح — ى وهذه الجملة أعني (ا + ب) × (ا — ب + ح) اشارة الى ضرب مقدار كمية ا + ب في كمية ا — ب + ح

ما كتب بين قوسين هكذا ( ) قليلا كان أو كثيرا يعتبر مقدارا واحدا واذا وضع عدد على يمين خط أو كم دل على ضرب ذلك الخط أو الكم في ذلك العدد الموضوع مثلا ٣ ا ب اشارة الى أخذ ثلاثة أمثال خط ا ب و $\frac{١}{٢}$ ا يدل على أخذ نصف زاوية ا وهذه $\frac{٢}{ا}$ اشارة

الى تعيين مربع خط ا ب و $\frac{٣}{اب}$ أيضا تدل على تعيين مكعب خط ا ب ومعانى التربيع والتكعيب تذكر تفصيلا فى محلها

وهذه √ علامة تدل على الجذر فلذا √ ٢ يدل على جذر مربع عدد ٢ وايضا √ ا × ب يدل على جذر حاصل ا × ب أو اشارة الى استخراج الوسط المتناسب الهندسى بين مقدارى ا و ب

(القضايا البديهية)

١ يتساوى المقداران اذا كان كل واحد منهما مساويا للمقدار الواحد

٢ الكل أعظم من جزئه

٣ الكل يساوى مجموع أجزائه

٤ لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين

٥ المقداران يكونان متساويين اذا أمكن انطباق أحدهما على الآخر انطباقا تاما سواء كان هذان المقداران خطين أو سطحين أو جسمين

الدعوى الاولى النظرية

الزوايا القائمة كلها متساوية (شكل ١٦)

مثلا اذا كان خط حـ ى المستقيم عمودا على خط ا ب وخط ز ح عمودا على هـ و تكون زاويتا ا حـ ى و هـ ز ح القائمتان متساويتين لانه لو أخذت الابعاد الاربعة متساوية وهى حـ ا و حـ ب و هـ ز و ز و يكون بعد ا ب مساويا للبعد هـ و ومن هذا يمكن وضع خط هـ و على خط ا ب بأن تكون نقطة هـ على نقطة ا ونقطة و على نقطة ب وحينئذ يكون الخطان المذكوران منطبقين والا لكان يمكن ان يوجد خطان مستقيمان بين نقطتى ا ب وهذا خلاف (بديهية ٤) وتكون نقطة ز التى هى وسط خط هـ و منطبقة على نقطة حـ التى هى وسط خط ا ب ومن هنا يكون خط هـ ز منطبقا على خط ا حـ وأيضا ينطبق ضلع ز ح

على

على ح ى فان قيل لم ينطبق ضلع ر ح على ح ى بل يكون خارجا عنه باستقامة ح ط أجيب بانه لو كان ضلع ر ح واقعا على ح ط لكان يلزم أن تكون زاوية ا ح ط مساوية لزاوية ط ح ب لانهما عين زاويتى هـ ر ح و ح ر و المتساويتين ولكن زاوية ا ح ط أكبر من زاوية ا ح ى أو عما ساواها وهى زاوية ى ح ب وأيضا زاوية ى ح ب أكبر من زاوية ط ح ب فلذا تكون زاوية ا ح ط أكبر من زاوية ط ح ب فيقتضى أن تكون زاويتا ا ح ط و ط ح ب متساويتين وغير متساويتين وهذا خلف

فيلزم أن يقع ضلع ر ح على ح ى وتنطبق زاوية ا ح ى على زاوية هـ ر ح ويثبت تساوى كل الزوايا القائمة بعضها (بديهية ٥) وهذا ما أردنا اثباته

الدعوى ب النظرية

مجموع زاويتى ا ح ى و ب ح ى المتجاورتين الحادثتين بجانبى خط ح ى المستقيم المتلاقى بخط ا ب يكون مساويا لقائمتين (شكل ١٧)

لانه لو جعل خط ح هـ عمودا على خط ا ب فى نقطة ح لكانت زاوية ا ح ى مجموع زاويتى ا ح هـ و هـ ح ى ومن هذا يكون ا ح ى + ب ح ى = ا ح هـ + هـ ح ى + ب ح ى لكن زاوية ا ح هـ قائمة ومجموع زاويتى هـ ح ى و ب ح ى هو زاوية ب ح هـ القائمة الاخرى فلذا لزم أن يكون مجموع زاويتى ا ح ى و ب ح ى مساوى قائمتين وهذا ما أردنا اثباته

(نتيجة ١) زاويتا ا ح ى و ب ح ى المتجاورتان اذا كانت احداهما قائمة تكون الاخرى قائمة

(نتيجة ٢)(شكل ١٨) اذا كان خط ى هـ عمودا على ا ب كذلك يكون خط ا ب عمودا على ى هـ لانه من كون ى هـ عمودا على ا ب يلزم أن تكون زاوية ا ح ى قائمة ولذا تكون مجاورتها وهى ا ح هـ قائمة كما فى

(نتيجة ١) ومن تساوى الزوايا القائمة ببعضها يكون ا ح هـ = ا ح ء
ومن هذا يكون خط ا ب عمودا على هـ ء (١٠)
(نتيجة ٢) (شكل ٣٤) مجموع الزوايا المتعددة المتوالية المنشأة فى جانب خط ب ق وهى ب ا ح و ح ا ء و ء ا هـ و هـ ا و الخ يكون مساويا لقائمتين لان مجموع تلك الزوايا مساو لمجموع زاويتى ب ا ح و ح ا و المتجاورتين

الدعوى ٧ النظرية

اذا كان للخطين المستقيمين نقطتان مشتركتان يتحدان اذا امتدا ويكونان خطا مستقيما واحدا

مثلا (شكل ١٩) اذا كانت النقطتان المشتركتان ا و ب يتحد الخطان فيما بين نقطتى ا ب لانه لا يمكن وجود خطين مستقيمين بين نقطتى ا ب (بديهية ٤) فان قيل اذا امتد الخطان تفرقا فى نقطة ح بوقوع أحدهما فى استقامة ح ء والآخر فى استقامة ح هـ يرسم خط ح و

بان تكون زاوية ا ح و قائمة
ثم يقال حيث ان ا ح ء خط مستقيم وخط ح و متلاق معه يكون ا ح و + و ح ء = قائمتين وأيضا حيث ان خط ا ح هـ مستقيم وخط ح و متلاق معه يكون ا ح و + و ح هـ = قائمتين فيكون ا ح و + و ح ء = ا ح و + و ح هـ فاذا طرحت الزاوية ا ح و المشتركة من طرفى هذه المتساوية تبقى زاوية و ح ء تساوى زاوية و ح هـ وهو محال لان زاوية و ح هـ جزء من زاوية و ح ء والجزء لا يساوى الكل فتبين بهذا ان كل مستقيمين اشتركا فى نقطتين يتحدان ويصيران مستقيما واحدا

(الدعوى د النظرية شكل ٢٠)

اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين مساويا القائمتين كان الضلع الخارج من احداهما على استقامة الضلع الخارج من الاخرى

أي اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ح د و د ح ب من الشكل المرقوم مساويا القائمتين كان الضلع ح ا على استقامة الضلع ح ب لانه لو لم يكن الضلع ح ا على استقامة الضلع ح ب لكان على استقامة ح هـ مثلا فيكون ا ح د + د ح هـ = قائمتين

والمفروض ان ا ح د + د ح ب = قائمتين فيلزم ان يكون ا ح د + د ح هـ = ا ح د + د ح ب وبطرح الزاوية المشتركة ا ح د تبقى الزاوية د ح هـ = د ح ب وهو محال لان الزاوية د ح ب جزء من الزاوية د ح هـ والجزء لا يساوي الكل فتبين بهذا ان الضلع ح ا على استقامة ح ب

(الدعوى هـ النظرية شكل ٢١)

اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما تكونان متساويتين

أي اذا تقاطع مستقيمان مثل ا ب و هـ د من الشكل المرقوم فالزاويتان ا ح هـ و ب ح د تكونان متساويتين

لانه يلزم من كون الخط ا ب مستقيما ان يكون

ا ح هـ + هـ ح ب = قائمتين ومن كون الخط هـ د مستقيما ان يكون

هـ ح ب + ب ح د = قائمتين فيكون

ا ح هـ + هـ ح ب = هـ ح ب + ب ح د وبطرح الزاوية المشتركة ح هـ ب تبقى الزاوية ا ح هـ مساوية للزاوية ب ح د وهو المطلوب اثباته وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية ا ح د مساوية للزاوية ب ح هـ

تنبيه (شكل ٢٢)

مجموع الزوايا ا ح ب و ب ح د و د ح هـ و هـ ح و و و ح ا المتعددة الحادثة من خطوط مستقيمة متلاقية في نقطة واحدة يساوي أربع قوائم

(الدعوى و النظرية شكل ٢٣)

المثلثان يكونان متساويين اذا كان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر ومنحصرة بين ضلعين كل منهما مساو لنظيره من الآخر

أي اذا كانت الزاوية ا = للزاوية ء والضلع ا ب = للضلع ء ﻫ والضلع ا ح = للضلع ء و يكون المثلث ا ب ح = للمثلث ء ﻫ و

(برهانه) أنه لو وضع المثلث ا ب ح على المثلث ء ﻫ و بحيث ينطبق الضلع ا ب على مساويه ء ﻫ لوقعت النقطة ا على النقطة ء والنقطة ب على النقطة ﻫ وحيث ان الزاوية ا = للزاوية ء يقع الضلع ا ح على مساويه ء و والنقطة ح على النقطة و فينطبق الضلع ب ح على الضلع ﻫ و فحينئذ ينطبق المثلث ا ب ح على المثلث ء ﻫ و فيكونان متساويين وهذا هو المطلوب

وينتج من هذه النظرية أنه اذا ساوى ضلعان وزاوية بينهما من مثلث ضلعين وزاوية بينهما من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية أجزاء أحدهما بقية أجزاء الآخر

أي اذا كان الضلع ا ب = للضلع ء ﻫ والضلع ا ح = للضلع ء و والزاوية ا = للزاوية ء تكون الزاوية ب = للزاوية ﻫ والزاوية ح = للزاوية و والضلع ب ح = للضلع ﻫ و

(الدعوى ز النظرية شكل ٢٣)

يتساوى المثلثان اذا تساوى من كل منهما ضلع والزاويتان المجاورتان له كل لنظيره

أي اذا كان الضلع ب ح مساويا للضلع ﻫ و والزاوية ب مساوية للزاوية ﻫ والزاوية ح مساوية للزاوية و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث ء ﻫ و

(برهانه) انه لو وضع المثلث ا ب ح على المثلث ء ﻫ و بحيث ينطبق الضلع ب ح على مساويه ﻫ و لوقعت النقطة ب على النقطة ﻫ والنقطة ح على النقطة و وحيث ان الزاوية ب = للزاوية ﻫ يقع الضلع ا ب على الضلع ء ﻫ

وتقع

وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط ءهـ وحيث ان الزاوية حـ = للزاوية
ويقع الضلع احـ على الضلع ءو وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط ءو فحينئذ
تقع النقطة ا على النقطة ءو وبهذا ينطبق المثلث ا ب حـ على المثلث ءهـ و
ويساويه وهذا هو المطلوب

نتيجة اذا ساوى ضلع وزاويتان مجاورتان له من مثلث ضلعا وزاويتين مجاورتين له
من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية أجزاء أحدهما لبقية أجزاء الآخر كل
بنظيره أى اذا كان الضلع ب حـ مساويا للضلع هـ و والزاوية ب مساوية
للزاوية هـ والزاوية حـ مساوية للزاوية و كانت الزاوية ا مساوية للزاوية ء
والضلع ا ب مساويا للضلع ءهـ والضلع ا حـ مساويا للضلع ءو

(الدعوى ح النظرية شكل ٢٣)

أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وهو أكبر من فاضلهما
أى ان الضلع ا ب من المثلث ا ب حـ أصغر من مجموع الضلعين ا حـ و حـ ب
وأكبر من فاضلها

(برهان القضية الاولى) أن الخط المستقيم ا ب أصغر من الخط المنكسر ا حـ ب
المار بنهايتى المستقيم ا و ب

(وبرهان الثانية) أن الضلع ب حـ < ا ب + ا حـ فاذا طرح ا حـ من كل
من الطرفين بقى ب حـ — ا حـ < ا ب أى ا ب > ب حـ — ا حـ وهو المطلوب

(الدعوى ط النظرية شكل ٢٤)

اذا أخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتى أحد أضلاعه مستقيمان
فمجموع المستقيمين المذكورين يكون أصغر من مجموع الضلعين الباقيين من
المثلث أى اذا أخذت نقطة مثل هـ داخل مثلث مثل ا ب حـ ومد منها الى
نهايتى الضلع ب حـ مستقيمان ب هـ و هـ حـ كان مجموع الخطين ب هـ و
هـ حـ أصغر من مجموع الضلعين ب ا و ا حـ

(برهانه) ان يقال لو مد أحد المستقيمين ب هـ على استقامته جهة هـ حتى قطع
الضلع ا حـ فى نقطة مثل ء لحدث مثلث ا ب ء فيه الضلع ب ء < ء ا +

اب أى به + هد < دا + اب وحدث أيضا مثلث جده فيه
الضلع جه < هد + دج فلو جمعت هذه الاشياء غير المتساوية الاصغر
للاصغر والاكبر للاكبر لتحصل به + هد + جه < دا + اب
+ هد + دج فاذا طرح الجزء المشترك هد من كل من الطرفين بقى
به + هج < دا + اب + دج فاذا وضع اج عوضا عن اد +
دج حدث

به + هج < با + اج وهو المطلوب

(الدعوى ـه النظرية شكل كه)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكانت الزاوية التى بين ضلعى المثلث الاول أكبر من الزاوية التى بين ضلعى المثلث الثانى يكون الضلع الثالث من المثلث الاول أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثانى

أى اذا كان الضلع اب من المثلث ابج مساويا للضلع ده من المثلث دهو والضلع اج مساويا للضلع دو والزاوية باج أكبر من الزاوية د يكون الضلع بج أكبر من الضلع هو

(برهانه) ان يرسم زاوية مثل باح = الزاوية د ويؤخذ اح = دو ويوصل بح فيحدث مثلث ابح = للمثلث دهو لان الضلع اب = ده فرضا والزاوية باح = الزاوية د عملا والضلع اح = دو كذلك (كما فى النظرية السادسة) فينتج من تساوى المثلثين ان الضلع بح = هو فاذا انصفت الزاوية جاح بمستقيم از لا يقع هذا المستقيم الا فى الزاوية باج لانها أكبر من الزاوية باح حينئذ اذا وصل زح يكون المثلث احز مساويا للمثلث ازج لان الضلع اح = للضلع جا عملا والزاوية حاز = للزاوية جاز كذلك والضلع از مشترك (كما فى النظرية السادسة) وينتج من تساوى هذين المثلثين ان الضلع حز = جز

ومن المعلوم ان المثلث حبز فيه الضلع بح < بز + حز فاذا أبدل الضلع حز بالضلع جز كان بح < بز + زج لكن بز + زج

= ح ب فيكون ب ح < ح ب وحيث ان ب ح = هـ و يكون هـ و < ح ب أى ح ب > هـ و وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكان الضلع الثالث من المثلث الاول أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثانى تكون الزاوية التى بين ضلعى المثلث الاول أكبر من الزاوية التى بين ضلعى المثلث الثانى أى اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح مساويا للضلع د هـ من المثلث د هـ و والضلع ا ح مساويا للضلع د و وكان الضلع ب ح أكبر من الضلع هـ و تكون الزاوية ب ا ح أكبر من الزاوية هـ د و

(برهانه) ان يقال لو لم تكن الزاوية ب ا ح أكبر من الزاوية هـ د و لكانت اما مساوية لها أو أصغر منها فان كانت مساوية لها لزم ان يكون الضلع ب ح مساويا للضلع هـ و وهذا مخالف للمفروض وان كانت أصغر منها لزم ان يكون الضلع ب ح أصغر من الضلع هـ و وهو أيضا مخالف للمفروض فحينئذ تكون الزاوية ب ا ح أكبر من الزاوية هـ د و وهو المطلوب

(الدعوى يا النظرية شكل ٢٣)

اذا ساوت أضلاع مثلث أضلاع مثلث آخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين أى اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح = للضلع د هـ من المثلث د هـ و والضلع ا ح = للضلع د و والضلع ب ح = للضلع هـ و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث د هـ و

(برهانه) ان يقال يلزم من تساوى الاضلاع المتناظرة ان تتساوى الزوايا المتناظرة أى ان تكون الزاوية ا = للزاوية د والزاوية ب = للزاوية هـ والزاوية ح = للزاوية و اذ لو لم تكن الزاوية ا مساوية للزاوية د لكانت اما أكبر منها أو أصغر منها فان كانت الزاوية ا أكبر من الزاوية د كان الضلع ب ح أكبر من الضلع هـ و وهذا مخالف للمفروض وان كانت الزاوية ا أصغر من الزاوية د كان الضلع ب ح أصغر من الضلع هـ و وهذا أيضا مخالف للمفروض

فتكون الزاوية ا مساوية للزاوية ء وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية ب = للزاوية هـ وان الزاوية ح = للزاوية و وحيث ان أجزاء المثلث ا ب ح مساوية لنظائرها من المثلث ء هـ و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث ء هـ و وهذا هو المطلوب

(تنبيه)

قد ظهر من برهان هذه القضية ان الزوايا المتساوية تكون مقابلة للاضلاع المتساوية لان الزاويتين المتساويتين ا و ء مقابلتان للضلعين المتساويين ب ح و هـ و

(الدعوى يب النظرية شكل ٢٨)

كل مثلث متساوى الساقين زاويتاه المقابلتان لساقيه متساويتان

أى اذا كان الساق ا ب مساويا للساق ا ح من المثلث ا ب ح تكون الزاوية ح مساوية للزاوية ب

(برهان) ان ينصف الضلع ب ح بنقطة مثل ء ويوصل المستقيم ا ء فيكون المثلثان الحادثان ا ب ء و ء ح ا متساويين لان الضلع ا ء مشترك والضلع ا ب = للضلع ا ح فرضا والضلع ب ء = للضلع ء ح عملا (كما فى النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية ح = للزاوية ب وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم ان أى ضلع من أضلاع المثلث غير المتساوى الساقين يصح أن يعتبر قاعدة ورأس الزاوية المقابلة له تسمى رأس المثلث وأما المثلث المتساوى الساقين فقاعدته ضلعه الثالث أى ما دون الساقين .

(وينتج من هذه النظرية)

أولا ان كل مثلث متساوى الاضلاع فهو متساوى الزوايا

وثانيا ان المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوى الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها ومنصفا لزاوية الرأس لانه يلزم من تساوى المثلثين

ا ب ء

ا ب د و ا د ح ان تكون الزاوية ب ا د = للزاوية د ا ح والزاوية ا د ب
= للزاوية ا د ح

(الدعوى يج النظرية)

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما

أى اذا كانت الزاوية ا ب ح = ا ح ب يكون الضلع ا ح = ا ب

(برهانه) ان يقال لو تصورنا مثلثا كالمثلث اَ بَ حَ مساويا للمثلث ا ب ح بحيث يكون الضلع بَ حَ = ب ح والزاوية بَ = ب والزاوية حَ = ح ثم طبقنا المثلث اَ بَ حَ على المثلث ا ب ح بحيث تقع النقطة حَ على النقطة ب والنقطة بَ على النقطة ح لكانت الزاوية حَ = ح = ب وحينئذ يقع الضلع حَ اَ على الضلع ب ا والضلع بَ اَ على ح ا وتقع النقطة اَ على النقطة ا فيكون اَ بَ = ا ح ويلزم من هذا ان يكون ا ب = ا ح وهو المطلوب

(الدعوى يد النظرية شكل ٣٠)

أى مثلث احدى زاويتيه أكبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبرى أكبر من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس أى أى مثلث أحد ضلعيه أكبر من الآخر تكون زاويته المقابلة للضلع الاكبر أكبر من زاويته المقابلة للضلع الاصغر

(برهان القضية الاولى) ان يقال ان تكن الزاوية ح > ب فيكون الضلع ا ب المقابل للزاوية ح أكبر من الضلع ا ح المقابل للزاوية ب

ولبيانه تنشأ زاوية مثل ب ح د مساوية للزاوية ب فيكون المثلث الحادث ب ح د متساوى الساقين أى يكون ب د = د ح وحيث ان الخط المستقيم ا ح أقصر من ا د + د ح و ا د + د ح = ا د + د ب = ا ب يكون ا ب أكبر من ا ح

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال لكن الضلع ا ب > ا ح فتكون الزاوية ح المقابلة للضلع ا ب أكبر من الزاوية ب المقابلة للضلع ا ح اذ لو لم تكن الزاوية ح أكبر من الزاوية ب لكانت اما أصغر منها أو مساوية

لهما فان كانت أصغر منها لزم ان يكون ا ب < ا ح وهذا مخالف للمفروض
وان كانت مساوية لها لزم ان يكون ا ب = ا ح وهذا أيضا مخالف للمفروض
فاذن يلزم ان تكون الزاوية ح أكبر من الزاوية ب وهو المطلوب

(الدعوى يه النظرية شكل ٣١)

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن ان ينزل منها عليه الا عمود واحد
(وبرهانها) ان تفرض نقطة مثل ح خارجة عن المستقيم ا ب وان ح د
عمود عليه ثم يقال ان أي مستقيم مد من النقطة ح الى أي نقطة من نقط
المستقيم ا ب غير النقطة د لا يكون عمودا عليه فان قيل يمكن تنزيل عمود آخر
مثل ح و مثلا قلنا اذا مد ح د على استقامته جهة د ثم أخذ ه د =
د ح ثم وصل المستقيم ه و حدث مثلث ه د و = للمثلث و ح د لان
الضلع و د مشترك والضلع ه د = للضلع د ح بالعمل والزاوية ه د و
= للزاوية و د ح لقيامهما ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان تكون الزاوية
ه و د مساوية للزاوية د و ح وحيث ادعى ان ح و عمود على ا ب تكون
الزاوية د و ح قائمة فتكون الزاوية ه و د كذلك ويلزم من هذا ان يكون
مجموع المتجاورتين ح و د و د و ه مساويا للقائمتين وعليه يكون الخط ح و ه
مستقيما واحدا مارا بالنقطتين ح و ه المار بهما المستقيم ح د ه ويلزم
من هذا امكان وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا ان مجموع
المتجاورتين ح و د و د و ه لا يكون مساويا للقائمتين فحينئذ لا تكون الزاوية
ح و د قائمة يعني ان المستقيم ح و ليس عمودا على المستقيم ا ب وهو المطلوب

(الدعوى يو النظرية شكل ٣٢)

اذا أخذت نقطة خارج مستقيم وأنزل منها عمود ومائل فاعلم
أولا ان العمود أقصر من كل مائل
وثانيا ان المائلين ذوي البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان
وثالثا ان بعدي المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان
ورابعا ان المائلين ذوي البعدين غير المتساويين أبعدهما عن موقع العمود

اطولهما

أطولهما
وخامسا ان المائلين غير المتساويين أطولهما أبعدهما عن موقع العمود
أى اذا اخذت نقطة مثل ا خارج خط مثل ده وأنزل منها عمود اب
ومواثل اه و اح و اد الخ فاعلم
أولا ان العمود اب يكون أصغر من كل مائل
وثانيا ان الخطين اح و اه المائلين المتباعدين عن موقع العمود يكونان متساويين اذا كان البعدان بح و به متساويين
وثالثا ان المائلين اح و اه اذا كانا متساويين فالبعدان بح و به يكونان كذلك
ورابعا ان البعد بد اذا كان أكبر من البعد به كان المائل اد أطول من المائل اه
وخامسا ان المائل اد اذا كان أطول من المائل اه كان البعد دب أكبر من البعد به
(برهان القضية الاولى) ان يمد العمود اب على استقامته جهة ب ثم يؤخذ البعد بو = اب ويوصل وح فيحدث مثلث وحب = للمثلث حبا لان الزاوية وبح = حبا لقيامهما والضلع حب مشترك والضلع وب = للضلع با بالعمل ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون الضلع وح = حا لكن فى المثلث احو الضلع او > اح + حو أى ان ٢ اب > ٢ اح فاذن يكون اب > اح وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث ان البعد حب = به بالفرض والضلع اب مشترك والزاوية حبا = للزاوية ابه لقيامهما يكون المثلث ابح = للمثلث ابه ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون حا = اه وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث ان المائل حا = للمائل اه يكون المثلث حاه متساوى الساقين فحينئذ يكون العمود اب النازل من

رأسه على قاعدته مارا بوسطها أي يكون حـ‍ب=بـ‍هـ وهو المطلوب
(وبرهان القضية الرابعة) ان يقال حيث ان البعد بد>بـ‍هـ يكون
المائل اد>اهـ لانه اذا أخذ حـ‍ب=بـ‍هـ ووصل اح و حو يحدث
مثلث وبح = للمثلث بحا لان الزاوية وبح = للزاوية حبا
لقيامهما والضلع حب مشترك والضلع وب= للضلع با بالعمل ويلزم
من تساوي هذين المثلثين ان يكون وح=حا وأيضا اذا وصل ود يحدث
مثلث ودب = للمثلث دبا لان الزاوية وبد = للزاوية دبا
لقيامهما والضلع دب مشترك والضلع وب = للضلع با بالعمل ويلزم
من تساوي هذين المثلثين ان يكون ود=دا لكن اد+دو>اح+حو أي
٢اد>٢اح أو اد>اح واح=اهـ فيكون اد>اهـ وهو المطلوب
(وبرهان القضية الخامسة) ان يقال حيث ان المائل اد أطول من المائل
اهـ يكون البعد دب أكبر من البعد بـ‍هـ لانه لو لم يكن البعد دب أكبر
من البعد بـ‍هـ لكان مساويا له أو أصغر منه فان كان مساويا له يلزم ان يكون
المائل اد مساويا للمائل اهـ وهذا مخالف للمفروض وان كان أصغر منه
يلزم ان يكون المائل دا أصغر من المائل اهـ وهو أيضا مخالف للمفروض
فاذن يكون البعد دب أكبر من البعد بـ‍هـ وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا ان البعد الحقيقي بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه لانه تبين ان العمود اصغر من كل مائل مار بها و باي نقطة من نقطه

وثانيا انه لا يمكن ان يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة متساوية لانه تبين ان المائل الابعد عن العمود هو الاطول من المائل الاقرب للعمود المذكور

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

اذا أقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم أولا ان البعدين الموصولين من أي نقطة من نقط العمود الى نهايتي المستقيم المذكور يكونان متساويين وثانيا ان

البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود الى نهايتى المستقيم المذكور لايكونان متساويين أى اذا أقيم عمود وهـ على وسط مستقيم اب محدود بنقطتين ا و ب فان البعدين اى و ىب يكونان متساويين والبعدين از و زب لايكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان البعد حا = حب بالفرض يكون المائل اى = ىب والمائل او = وب والمائل اهـ = هـب فتبين بهذا ان البعدين الموصولين من أى نقطة من نقط العمود هو الى نهايتى المستقيم اب يكونان متساويين

(وبرهان القضية الثانية) ان تفرض نقطة مثل ز خارج العمود هو ثم يوصل زا و زب ثم يوصل ىب فيكون اى = ىب كما سبق وحيث ان فى المثلث ب ز ى الضلع ب ز < زى + ىب وىب = ىا يكون ب ز < زى + ىا و زى + ىا = زا فيكون ب ز < زا أى ان البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود هو الى نهايتى المستقيم اب لايكونان متساويين

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا تساوى منهما الوتر والضلع

لكن الوتر اح = ىو والضلع اب = ىهـ فاقول ان المثلث القائم الزاوية ابح يكون مساويا للمثلث القائم الزاوية ىهـو وتتضح مساواة المثلثين اذا كان الضلع الثالث بح مساويا للضلع الثالث وهـ فاذا فرض ان هذين الضلعين ليسا متساويين وان بح أكبر من هو فيؤخذ ب ز = هو ويوصل از فيحدث مثلث اب ز يساوى للمثلث ىهـو لان الزاوية القائمة ب تساوى للزاوية القائمة هـ والضلع اب = ىهـ والضلع ب ز = هو فحينئذ هذان المثلثان متساويان ويلزم من تساويهما ان يكون از = ىو والمفروض ان ىو = اح فحينئذ از = اح لكن المائل اح لايمكن ان يساوى از لانه متباعد عن العمود* اب أكثر من از فحينئذ

لايمكن ان يكون ب ح أكبر من هو ويمثل هذا يبرهن على انه لايمكن ان يكون ب ح أصغر من هو فاذا المثلث ا ب ح = للمثلث دهو وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا تساوى منهما الوتر وزاوية غير القائمة

ليكن اح = دو والزاوية ا = د فيوضع المثلث دهو على ا ب ح بان يوضع دو على اح فمن حيث ان الزاوية د مساوية للزاوية ا فضلع ده ياخذ اتجاه اب وأيضا هو ياخذ اتجاه ب ح والا لامكن من نقطة ح تنزيل عمودين على اب فحينئذ النقطة ه تقع على النقطة ب وينطبق المثلثان على بعضهما انطباقا كليا وهو المطلوب

(الدعوى العشرون النظرية)

اذا انصفت زاوية بمستقيم فاعلم أولا ان العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة من نقطه متساويان

وثانيا ان العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة خارجة عنه ليسا متساويين أى اذا انصفت زاوية مثل ب ا ح بمستقيم اع فاعلم أولا ان العمودين ب و و ح النازلين على ضلعيها ب ا و اح من أى نقطة من نقط الخط اع كالنقطة و يكونان متساويين

وثانيا ان العمودين ده و هط النازلين على ضلعيها ا ب و اح من نقطة مثل ه خارجة عن المستقيم اع لايكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان الزاوية ب ا و = للزاوية و ا ح فرضا والوتر او مشترك بين المثلث او ب القائم الزاوية فى ب والمثلث او ح القائم الزاوية فى ح يكون المثلثان متساويين ويلزم من تساويهما ان يكون البعد ب و = للبعد و ح وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان ينزل من النقطة ع عمود ع ل على الضلع اح ثم يوصل مستقيم هل فيكون العمود طه أصغر من المائل هل وحيث ثبت فى المثلث هل ع ان الضلع هل < ه ع + ع ل وان ع ل = ع د

يكون

يكون هـل > هـ ح + ح ى لكن هـ ح + ح ى = هـ ى فيكون هـ ل > هـ ى
وحيث ان ط هـ > هـ ل يكون ط هـ > هـ ى وهو المطلوب

(تنبيه)

المستقيم المنصف لزاوية هو المحل الهندسي لكل نقطة بعداها عن ضلعي الزاوية متساويان

(مبحث الخطوط المتوازية ونتائجها)

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

المستقيمان اح و بى العمودان على مستقيم ثالث حى يكونان متوازيين لانهما ان تلاقيا في نقطة مثل م لامكن من هذه النقطة تنزيل عمودين على حى وهو محال

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

من نقطة يمكن ان يمد مستقيم يوازي لمستقيم معلوم

فمن نقطة ا ينزل اب عمودا على بح المعلوم ومن النقطة المذكورة ا يقام اى عمودا على اب فيكون اى موازيا بح لان المستقيمين اى و بح عمودان على اب

ومن البديهي انه لا يمكن أن يمد الا مستقيم واحد من نقطة معلومة بحيث يكون موازيا لمستقيم مفروض

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

اذا كان مستقيمان حى و اب متوازيين فكل مستقيم نح عمود على احدهما اب يكون عمودا على الآخر حى

ومن الواضح ان خط نح لابد أن يقطع خط حى والا لامكن من نقطة ن مد مستقيمين موازيين لخط حى ولبيان أن خط حى عمود على نح يقال اذا كان الخط حى مائلا على نح يمكن ان يقام من نقطة ح عمود على نح فيكون هذا العمود موازيا لخط اب وحينئذ يمكن وجود مستقيمين مارين بالنقطة ح وكلاهما موازيا للخط اب وهو محال

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

المستقيمان اب و حد الموازيان لثالث هو يكونان متوازيين لانه اذا تلاقى المستقيم اب مع المستقيم حد فى نقطة مثل م لامكن أن يمد من هذه النقطة مستقيمان موازيان لخط هو وهو محال

(تعاريف)

اذا قطع مستقيم مثل هو مستقيمين مثل اب و حد فيحدث ثمان زوايا فى نقطتى التقاطع ر و ح فالاربع زوايا (١) و (٤) و (٥) و (٨) الداخلة فى المسافة الكائنة بين المستقيمين اب و حد تسمى زوايا داخلة والاربع زوايا الاخر تسمى زوايا خارجة

وكل زاويتين مثل زاويتى (١) و (٥) موضوعة احداهما فى جهة بالنسبة للقاطع مخالفة لجهة وضع الاخرى و يكونان داخلين وغير متجاورين فانهما يسميان زاويتين متبادلتين داخلتين

وكل زاويتين مثل زاويتى (٨) و (٢) موضوعتين فى جهة واحدة من القاطع واحداهما داخلة والاخرى خارجة وغير متجاورتين فانهما يسميان زاويتين متناظرتين وكل زاويتين مثل زاويتى (٢) و (٦) موضوعتين بجانبى القاطع وخارجتين وغير متجاورتين فانهما يسميان زاويتين متبادلتين خارجتين

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

اذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فاولا الزاويتان المتبادلتان الداخلتان تكونان متساويتين

وثانيا الزاويتان المتبادلتان الخارجتان تكونان متساويتين

وثالثا الزاويتان المتناظرتان تكونان متساويتين

ورابعا الزاويتان الداخلتان الموضوعتان فى جهة واحدة من القاطع مجموعهما يساوى قائمتين

برهان القضية الاولى أن يقال ليكن خط اب موازيا لخط حد وخط رح قاطعهما فى نقطة ط وسط هو ينزل طم عمودا على اب فهذا الخط

يكون أيضا عمودا على حد ويكون المثلثان القائما الزاوية مطه و طكو متساويين لان الوترين طه و طو متساويان بالعمل والزاويتان مطه و وطك متساويتان لانهما متقابلتان بالرأس وينتج من تساوى هذين المثلثين أن الزاويتين المتبادلتين الداخلتين مهط و طوك متساويتان

ولاثبات أن زاوية ـهو تساوى زاوية هوح يقال من المعلوم ان مجموع زاويتى اهو و ـهو يساوى قائمتين وأيضا مجموع زاويتى دوه و حوه يساوى قائمتين فيكون اهو + ـهو = دوه + حوه لكن زاوية اهو = دوه فتكون زاوية ـهو = حوه

وثانيا الزاويتان المتبادلتان الخارجتان زهـ و حوح متساويتان لانهما مقابلتان بالرأس للزاويتين المتبادلتين الداخلتين مهط و طوك

ثالثا الزاويتان المتناظرتان زهـ و هود متساويتان لان زهـ = اهو و اهو = هود

رابعا مجموع زاويتى ـهو و هود يساوى قائمتين لان ـهو + اهو = قائمتين و اهو = هود

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

وبالعكس اذا حدث من مستقيمين مع مستقيم قاطع زوايا متبادلة داخلة متساوية أو زوايا متبادلة خارجة متساوية أو زوايا متناظرة متساوية أو زوايا داخلة فى جهة واحدة من القاطع ومجموعها يساوى قائمتين فهذان المستقيمان يكونان متوازيين

أولا ليكن المستقيمان اـ و حد مقطوعين بالقاطع زح فاذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان اهو و هود متساويتين يكون خط اـ موازيا لخط حد

لانه لو لم يكن خط اـ موازيا لخط حد فيمكن أن يمد من النقطة ه مستقيم هـ يوازى خط حد ويلزم من هذا أن تكون الزاويتان ـهو و ودهـ متساويتين لكونهما متبادلتين داخلتين والمفروض أن زاوية اهو = هود

فتكون زاوية اهو = ىهو وهذا محال
وثانيا اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان زهـ ب و حوح متساويتين تكون الزاويتان اهو و هوى متساويتين أيضا وبمقتضى ما تقرر يكون خط ا ب موازيا لخط حى
وثالثا اذا كانت الزاويتان المتناظرتان زهب و هوى متساويتين يكون خط اب موازيا لخط حى لان زاوية زهب تساوى زاوية اهو فتكون زاوية اهو = هوى ويلزم من هذا أن يكون خط اب موازيا لخط حى
ورابعا اذا كان مجموع زاويتى بهو و هوى مساويا لقائمتين يكون خط اب موازيا لخط حى لانه من كون بهو + اهو = قائمتين ينتج من ذلك أن زاوية اهو = هوى ويلزم من هذا أن يكون خط اب موازيا لخط حى

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية)

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متوازية تتساويان أو مجموعهما يساوى قائمتين
أولا لتكن اب ح و ىهو زاويتين اضلاعهما متوازية ومتجهة الى جهة واحدة فهاتان الزاويتان تكونان متساويتين وذلك أن الزاوية ىلح تساوى الزاوية المناظرة لها ىهو وأيضا الزاوية ىلح تساوى الزاوية المناظرة لها اب ح فتكون زاوية اب ح = ىهو
وثانيا لتكن اب ح و مهف زاويتين اضلاعهما متوازية ومتجهة فى اتجاه مضاد فهاتان الزاويتان تكونان أيضا متساويتين لان زاوية مهف = ىهو وزاوية ىهو = اب ح
وثالثا الزاويتان اب ح و ىهم اللتان اضلاعهما المتناظرة متوازية لكن ضلعان منهما وهما با و هى متجهان الى جهة واحدة والضلعان الآخران ب ح و هم كل منهما متجه بعكس اتجاه الآخر مجموعهما يساوى قائمتين لان مجموع زاويتى ىهم و ىهو يساوى قائمتين وزاوية ىهو تساوى زاوية اب ح

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية)

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متعامدة متساويتان أو متكاملتان أى أن مجموعهما يساوى قائمتين

لتكن ـاح و دهو زاويتين اضلاعهما المتناظرة متعامدة فنمد من النقطة ا خط اے عمودا على اـ ونمد أيضا خط اع عمودا على خط اح فالمستقيمان اے و اع يكونان موازيين بالتناظر للمستقيمين دهـ و هو ومتجهين فى جهة واحدة فحينئذ زاوية ےاع تساوى زاوية دهو وحيث ان مجموع زاويتى ےاح و حاـ يساوى زاوية قائمة وكذا مجموع زاويتى ـاح و حاـ يساوى زاوية قائمة فحينئذ تكون زاوية ےاح مساوية لزاوية ـاح

تنبيه اذا اعتبرت الزاوية الحادثة بين المستقيم هو وامتداد المستقيم دهـ يشاهد أن مجموع زاويتى وهر و ـاح يساوى زاويتين قائمتين

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية)

مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين

نمد اهـ يوازى ـح ونمد اح جهة ا فتحدث زاوية هاء تساوى زاوية احـ لكونهما زاويتين متناظرتين بالنسبة للمتوازيين ـح و اهـ المقطوعين بالقاطع اح وأيضا زاوية حـا تساوى زاوية ـاهـ لكونهما زاويتين متبادلتين داخلتين بالنسبة للمتوازيين ـح و اهـ المقطوعين بالقاطع اـ فحينئذ مجموع زوايا المثلث يساوى مجموع الثلاث زوايا التى هى حاـ و ـاهـ و هاء المنشأة حول نقطة ا فى جهة واحدة من المستقيم اح وحيث ان هذا المجموع الاخير يساوى زاويتين قائمتين يلزم أن يكون المجموع الاول مساويا بالزاويتين قائمتين كذلك

نتيجة أولى لايمكن ان يوجد فى المثلث الازاوية قائمة ومن البديهى انه لايمكن أن يوجد فى المثلث الازاوية منفرجة

نتيجة ثانية فى كل مثلث قائم الزاوية مجموع زاويتيه الحادتين يساوى زاوية قائمة

نتيجة ثالثة اذا علمت زاويتان من مثلث أو مجموعهما تعلم الزاوية الثالثة بطرح هذا المجموع من القائمتين

نتيجة رابعة الزاوية الخارجة ـ اى الحادثة بين ضلع ـ ا وامتداد ضلع اح تساوى لمجموع الزاويتين الداخلتين حـ ا و ـ حا

(الدعوى الثلاثون النظرية)

مجموع الزوايا الداخلة من مضلع محدب يساوى من أمثال القائمتين بقدر ما فيه من الاضلاع الا اثنين

فى أحد الرؤس ا نصل الاقطار لجميع الرؤس الغير متجاورة فينقسم المضلع الى مثلثات عددها كعدد اضلاعه الا ضلعين لانه يمكن اعتبار هذه المثلثات المختلفة متحدة الرأس ا وقواعدها اضلاع المضلع ما عدا المثلثين المتطرفين اللذين كل منهما يحتوى على ضلعين من المضلع المذكور ويشاهد أيضا أن مجموع زوايا هذه المثلثات يساوى لمجموع زوايا المضلع فحينئذ هذا المجموع الاخير يساوى من أمثال القائمتين بقدر ما فيه من الاضلاع الا ضلعين

واذا رمز بالحرف ى لعدد اضلاع المضلع فمجموع زواياه يكون

$$٢ \times (ى - ٢) = ٢ ى - ٤$$

(الدعوى الحادية والثلاثون النظرية)

الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة فى المتوازى الاضلاع متساوية

فاذا وصل القطر ـ ى يحدث المثلثان اـ ى و ى ـ ح فيهما الضلع ـ ى مشترك وبسبب توازى اى و ـ ح تكون زاوية اى ـ = ى ـ ح وبسبب توازى اـ و حى تكون زاوية اـ ى = ـ ى ح فحينئذ يكون المثلثان اى ـ و ى ـ ح متساويين فحينئذ يكون الضلع اـ المقابل للزاوية اى ـ مساويا للضلع ى ح المقابل للزاوية المساوية لها ى ـ ح وأيضا يكون الضلع الثالث اى مساويا للثالث ـ ح فحينئذ الاضلاع المتقابلة من متوازى الاضلاع متساوية

وأيضا من تساوى المثلثين المذكورين تكون زاوية ا مساوية لزاوية ح

وزاوية ادح المركبة من زاويتى اد‍ب و ب‍دح مساوية لزاوية اب‍ح المركبة من زاويتى دب‍ح و اب‍د فحينئذ الزوايا المتقابلة فى المتوازى الاضلاع متساوية

نتيجة أولى المستقيمان المتوازيان اب‍ و حد المحصوران بين مستقيمين متوازيين آخرين اد و ب‍ح يكونان متساويين

نتيجة ثانية المستقيمان المتوازيان على ابعاد متساوية فى جميع امتدادهما لانه من كون حد و اب‍ متوازيين فاذا أنزلنا من النقطتين ع و ن عمودى ع و و نه على اب‍ فهذان العمودان يكونان متوازيين ومتساويين لانهما محصوران بين مستقيمين متوازيين

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية)

اذا كان فى شكل رباعى اب‍حد كل ضلعين متقابلين متساويين أعنى اذا كان اب‍ = حد و اد = ب‍ح فالاضلاع المتساوية تكون متوازية والشكل يكون متوازى الاضلاع

لانه لو وصل القطر ب‍د حدث مثلثان اب‍د و ب‍دح اضلاعهما المتناظرة متساوية فهما متساويان ويلزم من تساويهما أن تكون الزاوية اد‍ب المقابلة للضلع اب‍ مساوية للزاوية دب‍ح المقابلة للضلع حد وعليه يكون الضلع اد موازيا للضلع ب‍ح وبمثل هذا يبرهن على أن ضلع اب‍ يوازى حد فحينئذ الشكل الرباعى اب‍حد هو متوازى الاضلاع

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية)

اذا كان الضلعان المتقابلان اب‍ و حد من شكل رباعى متساويين ومتوازيين فالضلعان الآخران يكونان كذلك متساويين ومتوازيين والشكل اب‍حد يكون متوازى الاضلاع

فاذا وصل القطر ب‍د يحدث المثلثان اب‍د و دب‍ح متساويان لان خط اب‍ يوازى حد فتكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان اب‍د و ب‍دح متساويتين والضلع اب‍ = دح بالفرض والضلع دب‍ مشترك فحينئذ

المثلثان المذكوران يكونان متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون اء = ب ح وان تكون الزاوية اد ب = د ب ح وعليه يكون خط اد موازيا لخط ب ح فحينئذ الشكل ا ب ح د هو متوازى الاضلاع

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية)

قطرا المتوازى الاضلاع اح و ب د ينصفان بعضهما

لانه بمقارنة المثلث ا د ه بالمثلث ح ه ب يشاهد ان الضلع اد = ح ب والزاوية ا د ه = ح ب ه والزاوية د ا ه = ه ح ب فحينئذ المثلثان المذكوران يكونان متساويين ويلزم من هذا أن يكون الضلع ا ه المقابل للزاوية ا د ه مساويا للضلع ه ح المقابل للزاوية ه ب ح ويكون أيضا د ه = ه ب

تنبيه قطرا المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه فى الحالة التى يكون فيها الشكل المتوازى الاضلاع شكلا معينا يكون الضلعان ا ب و ب ح متساويين ويكون المثلثان ا ه ب و ه ب ح متساويين بسبب تساوى اضلاعهما المتناظرة وينتج من تساويهما أن الزاوية ا ه ب = ب ه ح فحينئذ قطرا المعين ينصفان بعضهما عمادا

تمت المقالة الاولى

(المقالة الثانية)

(في بيان الدوائر ومقادير الزوايا)

(الحدود)

١ (شكل ٤٦) محيط الدائرة هو الخط المنحني الذي تكون الابعاد بين أي نقطة من نقطه والنقطة الداخلة متساوية وتلك النقطة الداخلة تسمى مركزا والدائرة هي السطح المحاط بذلك الخط المنحني اعلم ان بعضهم عرف الدائرة والمحيط بتعريف واحد من غير تمييز وخصوص تعريف كل واحد منهما يتميز على ماذكر بادنى تامل لان الدائرة هي سطح مستو له طول وعرض وأمّا المحيط فهو الخط الذي ليس له الا طول فقط

٢ جميع الخطوط المستقيمة الواصلة من المركز الى المحيط مثل حا و حه و حء الخ تسمى انصاف أقطار وكل خط يمر بالمركز وينتهي بالمحيط مثل خط اب يسمى قطرا

فعلى ماذكر في تعريف الدائرة جميع انصاف الاقطار متساوية وحيث ان الاقطار هي أضعاف انصاف الاقطار فهي أيضا متساوية

٣ جزء محيط الدائرة مثل وحر يسمى قوسا والخط المستقيم الواصل بين نهايتي القوس يسمى وترا نحو خط ور

٤ قطعة الدائرة هي جزء من الدائرة يحاط بقوس ووتره

اعلم ان وتر ور دائما يكون مختصا بالقوس الاصغر وان كان موافقا للقوس الاكبر والقطعة الكبرى ان لم يكن مخصصا بهما

٥ قطاع الدائرة هو قسم من الدائرة يحاط بقوس ءه وبنصفي قطر حء و حه الواصلين الى نهايتي ذلك القوس

٦ (شكل ٤٧) الخط المرسوم داخل الدائرة هو خط مستقيم مرسوم داخل الدائرة طرفاه منتهيان بالمحيط كخط اب

الزاوية المرسومة داخل الدائرة هي زاوية رأسها بالمحيط وطرفاها محاطان بوترين مثل زاوية ب ا ح

المثلث المرسوم داخل الدائرة هو مثلث رؤسه بالمحيط كمثلث ب ا ح

وعلى العموم الشكل المرسوم داخل الدائرة هو الشكل الذى تكون جميع زواياه بالمحيط وحينئذ هذه الدائرة تسمى الدائرة المارة بزوايا ذلك الشكل المرسوم

٧ (شكل ٤٨) الخط الذى يقطع محيط الدائرة فى موضعين يسمى خطا قاطعا كخط ا ب

٨ الخط الذى لا يشترك مع محيط الدائرة الا فى نقطة واحدة فقط يسمى خطا مماسا ونقطة م المشتركة بين ذلك الخط والمحيط تسمى نقطة التماس

٩ وبهذا علم انه متى كان لمحيطى الدائرتين نقطة مشتركة فقط يكون هذان المحيطان متماسين

١٠ (شكل ١٦٠) اذا كانت اضلاع الشكل المستقيم الاضلاع متماسة بمحيط الدائرة فيقال لذلك الشكل شكل مرسوم على الدائرة وتسمى تلك الدائرة دائرة مرسومة داخل الشكل المستقيم الاضلاع المذكور

(الدعوى الاولى النظرية)

(شكل ٤٩) كل قطر مثل ا ب يقسم الدائرة والمحيط قسمين متساويين لانه لو جعل قطر ا ب قاعدة مشتركة وانطبق شكل اهب على شكل اوب لكان منحنى اهب واقعا على منحنى اوب ومنطبقا عليه كال الانطباق والا لكان فى احد هذين المنحنيين نقطة واقعة على ابعاد غير متساوية من المركز وهذا خلف لما مر فى تعريف الدائرة فعلى هذا يلزم ان المنحنيين المذكورين والشكلين المذكورين منطبقان ومتساويان ومن ثمة ثبت المطلوب بان ذلك القطر يقسم الدائرة والمحيط قسمين متساويين

(الدعوى الثانية النظرية)

كل وتر مرسوم داخل الدائرة هو اصغر من القطر (شكل ٤٩) لانه متى وصل نصفا قطر ح ا و ح د الى نهايتى وتر ا د فيحدث مثلث

$ا ح د$ فيه $اد < اح + حد$ ومن كون $اح + حد =$ قطر $اب$ يلزم أن يكون $اد < اب$ وبهذا ثبت المطلوب بان الوتر يكون أصغر من القطر

نتيجة أكبر ما يمكن رسمه من الخط القاطع داخل الدائرة يكون مساويا للقطر

(الدعوى الثالثة النظرية)

الخط المستقيم لا يقطع محيط الدائرة الا فى نقطتين فقط فان قيل يقطعها فى ثلاث نقط أجيب بانه لو قطع محيط الدائرة فى ثلاث نقط للزم أن تكون الابعاد بين المركز وبين تلك النقط متساوية وهذا يقتضى انه يمكن تساوى ثلاثة خطوط مخرجة من نقطة الى خط مستقيم وهذا خلاف انظر (مقالة ١ دعوى ١٦) ومن ثمة ثبت المطلوب بان الخط المستقيم القاطع لا يقطع محيط الدائرة الا فى نقطتين فقط

(الدعوى الرابعة النظرية)

فى الدائرة الواحدة او الدوائر المتساوية الاقواس المتساوية تكون موترة للاوتار المتساوية وبالعكس الاوتار المتساوية تكون موترة للاقواس المتساوية

مثلا (شكل ٥٠) اذا كان يلزم فى الدوائر المتساوية نصف قطر اح يكون مساويا لنصف قطر هر فان كان قوس اطد مساويا للقوس هدح يكون وتر اد مساويا لوتر هح لانه يلزم من كون قطر اب مساويا لقطر هو ومنصفا للدائرة يمكن ان ينطبق نصف دائرة اطدب على نصف دائرة هدحو المساوى له انطباقا كاملا بان يكون قطر اب واقعا على قطر هو وبهذا يتحد منحنى اطدب مع منحنى هدحو ويكون منطبقا عليه ولو لم ينطبق عليه لكان فى هذين المنحنيين نقط واقعة على ابعاد غير متساوية من المركز وهذا بخلاف تعريف الدائرة فعلى هذا ينطبق هذان المنحنيان ولكون قوس اطد مساويا لقوس هدح بالفرض تقع نقطة د على نقطة ح وتنطبق نهايات وترى اد و هح ومن ثمة ثبت المطلوب بان الوترين متساويان

وبالعكس حيث ان انصاف أقطار الدوائر المتساوية متساوية يكون نصف قطر

اح مساويا لنصف قطر هـ ر أقول متى كان وتر اد مساوى وتر هح يكون قوس اطد مساويا لقوس هـىح فاذا ارسم نصف قطر دح و ح ر يكون في مثلثي احد و هرح الحادثين اح = هر و دح = ح ى وبالفرض اد = هح فمن تساوى الاضلاع الثلاث من هذين المثلثين يكونان متساويين انظر (مقالة ١) وتكون زاوية احد مساوية لزاوية هرح فاذا انطبق نصف دائرة ادى على نصف دائرة هرح و المساوى له كما تقدم يتحد المنحنيان ويلزم من كون زاوية احد مساوية لزاوية هرح ان يقع نصف قطر حد على نصف قطر رح ونقطة د على نقطة ح فلذا ظهر وثبت المطلوب من أن يكون قوس اطد مساويا لقوس هـىح

(الدعوى الخامسة النظرية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتساوية الوتر الموتر للقوس الاكبر هو أكبر وبالعكس الوتر الاكبر يكون موترا للقوس الاكبر

أولا لانه متى كان قوس اك أكبر من قوس اد يكون وتر اك أكبر من وتر اد وأيضا اذا وصل نصف قطر حا و حك ففي مثلث احك ضلعا اح و حك مساويان لضلعي اح و حد في مثلث احد ولكون زاوية احك أكبر من زاوية احد يكون الضلع الثالث من المثلث الاول أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني وهو اد انظر (مقالة ١ دعوى ١٠) وبهذا ثبت المطلوب بأن الوتر الموتر للقوس الاكبر هو أكبر

ثانيا وبالعكس انه متى فرض ان وتر اك أكبر من وتر اد يكون قوس اك أعظم من قوس اد لان في مثلثي احك و احد ضلعي اح و حك مساويان لضلعي اح و حد و اك الذي هو الضلع الثالث فرض انه أكبر من ضلع اد وبهذا تكون زاوية احك أكبر من زاوية احد ومن ثمة ثبت المطلوب بان قوس اك أكبر من قوس اد

تنبيه شرط في هذه الدعوى ان القوس المفروض يكون أصغر من نصف المحيط

لانه لو كان القوس أ كبر من نصف المحيط لبدا الناشئ مخالف لخاصة ماصرح به في الدعوى يعني اذن اظهر انه كلما كبر القوس صغر الوتر و بالعكس كلما صغر الوتر كبر القوس وعلى هذا حيث ان قوس ا ح ب ء أ كبر من قوس ا ح ب ك يكون اء وتر القوس الاول أصغر من اك وتر القوس الثانى

(الدعوى السادسة النظرية)

اذا كان نصف قطر ح و عمودا على وتر ا ب ينصف الوتر المذكور وقوسه المسمى ا و ب

لانه متى وصل نصفا قطر ح ا و ح ب وهما بالنسبة الى عمود ح ء مائلان متساويان فيكون بعدا اء و ءب متساويين (١٦) وأيضا يلزم من كون اء = ءب وعمود ح ر عمودا مخرجا من وسط وتر ا ب فالبعدان من أي نقطة واقعة على ذلك العمود الى نهايتي خط ا ب متساويان وحيث ان نقطة ر هي احدى النقط الواقعة على ذلك العمود يكون ا ر = ر ب ومتى كان وتر ا ر مساويا لوتر ر ب يلزم أن يكون قوس ا ر مساويا لقوس ر ب فعلى هذا علم ان نصف قطر ح ر الواقع عمودا على وتر ا ب يقسم وتر ا ب وقوسه في نقطة ر الى قسمين متساويين ويثبت المطلوب

تنبيه مركز ح ونقطة ء التي هي وسط وتر ا ب ونقطة ر التي هي وسط القوس الموتر لذلك الوتر هذه الثلاث نقط وقعت على خط مستقيم واقع عمودا على الوتر ومن كون انه يكفي نقطتان لتعيين خط مستقيم فالخط الذي يمر من نقطتين من تلك النقط المذكورة لابد ان يمر من الاخرى ويكون ذلك الخط عمودا على الوتر وكذلك العمود المخرج من وسط الوتر يمر بمركز الدائرة وبوسط القوس الموتر لذلك الوتر لان ذلك العمود هو عين العمود النازل من المركز على وسط الوتر فكل واحد من هذين العمودين عمود على وسط الوتر فلزم ان يتحدا والا لكان يمكن اخراج عمودين من نقطة على خط مستقيم وهذا خلف

(الدعوى السابعة النظرية)

يمكن ان يمر من ثلاث نقط ا و ب و ح التي ليست على خط مستقيم محيط

دائرة فقط ولا يمكن ان يمر محيط آخر

فيوصل خطا ا ب و ب ح ومتى تنصفا بعمودى د هـ و و و فهذان العمودان يلتقيان فى نقطة ح ولو لم يلتقيا لكانا متوازيين فان قيل انهما متوازيان يقال حيث ان خط ا ب عمود على د هـ يكون عمودا على خط و و الموازى الآخر واذن لكانت زاوية ط قائمة ولكون نقط ا و ب و ح ليست على خط مستقيم يكون خط ب ط المستقيم المخرج من نقطة ب منحرفا عن خط ب و وعمودا على ط و وحينئذ يتصور انزال عمودى ب و و ب ط من النقطة ب الواحدة على خط و ط وهذا خلف فلذا يثبت انهما لا يتوازيان ويتلاقيان فى نقطة ح ومن كون نقطة ح هى نقطة واقعة على عمود د هـ المخرج من وسط خط ا ب يكون البعدان من تلك النقطة الى نهايتى خط ا ب نقطتى ا و ب متساويين وأيضا من كون نقطة ح هى نقطة واقعة على عمود و و الذى أخرج من وسط خط ب ح يكون البعدان من تلك النقطة الى نهايتى خط ب ح وهما نقطتا ب و ح متساويين وتكون ابعاد ح ا و ح ب و ح ح الثلاث متساوية فالمحيط المرسوم على ان تكون نقطة ح مركزا وبعد ح ب نصف قطر يمر بنقط ا و ب و ح الثلاث ويثبت المطلوب

تبين لنا وثبت انه قد يمكن ان يمر محيط دائرة بالثلاث نقط المفروضة التى لم تكن على خط مستقيم ولكن لا يمر محيط آخر دون مامر لانه لو قيل انه يمر بنقط ا و ب و ح المفروضة محيط دائرة آخر يقال فلا بد أن يكون مركز هذا المحيط واقعا على عمود د هـ لانه لو كان خارجا من ذلك العمود لكان البعدان من نقطتى ب و ح غير متساويين والنقطة الخارجة عن العمود لا تكون مركزا وبمثل هذا ثبت ان المركز لا يكون خارجا أيضا عن عمود و و ويلزم لذلك المركز ان يكون واقعا على كل من عمودى د هـ و د و وحيث ان الخطين المستقيمين لا يتقاطعان الا فى نقطة واحدة فقط علم انه لا يكون للعمودين نقطة مشتركة الا نقطة ح ومن ثمة ثبت انه لا يمر من ثلاث نقط الا محيط واحد فقط

نتيجة لا تتقاطع الدائرتان فى نقط أكثر من نقطتين لانه لو كان ابتلك الدائرتين ثلاث نقط مشتركة للزم اتحاد المركز فيهما واذن لا تعدا

(الدعوى الثامنة النظرية)

الوتران المتساويان بعداهما من المركز متساويان والوتران المختلفان الاصغر ابعد من المركز فاما وترا ا ب و هـ د المتساويان فينصفان بعمودى و ح و ح د واذا وصل نصف قطر ا ح و ح د فيحدث مثلثان ا ح و و د و ح قائما الزاوية وهما متساويان حيث ان فيهما وترى اح و د ح متساويان وضلع ا و الذى هو نصف وتر ا ب مساو لضلع د و الذى هو نصف وتر د هـ ومتى تساوى فى المثلثين القائمى الزاوية الوتر والضلع يتساوى المثلثان ويكون ضلع و ح مساويا لضلع ح و ومن ثمة يثبت ان وترى ا ب و د هـ المتساويين يكون بعداهما من المركز متساويين وأيضا اذا كان وتر ا ع أكبر من وتر د هـ فيكون قوس ا ب ع أكبر من قوس د ك هـ فاذا اقطع من قوس ا ب ع قوس ا ب ت مساويا لقوس د ك هـ ووصل وتر ا ب ونزل عمود ح و على ذلك الوتر وعمود ح ط على وتر ا ع يكون عمود ح و اكبر من جزئه ح م ولكون ح م أكبر من عمود ح ط يثبت ان عمود ح و هو اكبر كثيرا من عمود ح ط ويلزم من كون وترى ا ت و د هـ متساويين ان يكون ح و = ح و وبهذا يكون ح و > ح ط ومن ثمة يثبت المطلوب على ان الوتر الاصغر يكون أبعد من المركز

(الدعوى التاسعة النظرية)

عمود ت د المخرج من نهاية اى نصف قطر كان نحو ح ا يكون مماسا لمحيط الدائرة لان جميع الخطوط المائلة الواصلة من المركز الى خط ب د مثل خط ح هـ هى اطول من عمودى ح ا ولذا تكون نقطة هـ واقعة خارج الدائرة فعلى هذا تكون كل نقطة واقعة على خط ت د خارج الدائرة الا نقطة ا ولم تكن نقطة مشتركة بين المحيط وخط ت د الا نقطة ا فقط ومن ثمة ثبت

المطلوب على ان خط ب د المذكور مماس

تنبيه لا يمكن رسم خط مماس بالدائرة من نقطة ا الواقعة على المحيط الا خط ب د لانه لو قيل برسم مماس آخر يقال ان هذا المماس الذي رسم لا يكون عمودا على نصف قطر ح ا وفي هذا يكون ذلك المماس بالنسبة الى نصف قطر ح ا خطا مائلا والعمود النازل من مركز الدائرة على المماس الجديد اصغر من نصف قطر ح ا فلذا يجب ان يكون الخط الذي قيل انه مماس داخلا في الدائرة وخطا قاطعا

(الدعوى العاشرة النظرية)

قوسا ط ك و ب ل المنحصران من المحيط بين خطي ا ب و د ه المتوازيين يكونان متساويين

وهذه الدعوى تكون على ثلاثة احوال

الحال الاول وهو ان يكون الخطان المتوازيان قاطعين المحيط فحينئذ اذا رسم نصف قطر ح ع عمودا على وتر ط ب أحد المتوازيين يكون عمودا على وتر ك ل الموازي الآخر فعلى هذا تكون نقطة ع وسطا لقوس ط ع ب و ك ع ل معا ومن هذا يكون قوس ط ع = قوس ع ب وقوس ك ع مساويا قوس ع ل فاذا طرحت الاشياء المتساوية من اشياء متساوية فبقيتها تكون متساوية ومن ثمة يثبت المطلوب بان يكون ط ع − ك ع = ع ب − ع ل اعني ان قوس ط ك = ل ب

الحال الثاني وهو ان يكون احد المتوازيين قاطعا والآخر مماسا فاذا وصل بين المركز وبين نقطة ع التي هي نقطة التماس بنصف قطر ح ع فمتى كان نصف قطر ح ع عمودا على خط د ه المماس يكون عمودا على موازيه الذي هو وتر ط ب وحيث ان نصف قطر ح ع عمودا على وتر ط ب يقتضي ان تكون نقطة ع واقعة في وسط قوس ط غ ب ومن اجل ذلك يثبت ان قوسي ط ع و ع ب المحصورين بين ا ب و د ه المتوازيين يكونان متساويين

الحال الثالث وهو ان يكون احد المتوازيين مماساً فى نقطة ح والآخر فى نقطة ع فاذا رسم خط ا ب القاطع موازياً لهذين المماسين فعلى ماذكر فى الحال الثانى يكون قوس ط ح = قوس ح ب وقوس ط ع = قوس ب ع وبهذا يكون قوس ح ط ع الذى هو الكل = قوس ح ب ع ويكون كل واحد من هذين القوسين نصف المحيط ويثبت المطلوب

(الدعوى الحادية عشر النظرية)

اذا تقاطع دائرتان فى نقطتين فالخط المار بين المركزين يكون عموداً على وتر ا ب الواصل بين نقطتى تقاطع الدائرتين ومنصفاله لان خط ا ب الواصل بين نقطتى التقاطع هو وتر مشترك والعمود الذى يخرج من وسطه ويمد من الطرفين يمر من كل من المركزين ح و د ومن حيث انه لا يمكن ان يوصل بين النقطتين المفروضتين الا بخط مستقيم واحد فقط يلزم ان يكون الخط المار من المركزين عموداً على وسط الوتر المشترك ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية عشر النظرية)

اذا كان البعد بين مركزى الدائرتين اصغر من مجموع نصفى قطريهما وكان نصف القطر الاكبر اصغر من مجموع نصف القطر الاصغر والبعد بين المركزين تتقاطع هاتان الدائرتان

لانه لابد لحصول تقاطع الدائرتين ان يمكن رسم مثلث ا ح د ولم يكف الاثبات بان يكون خط ح د المستقيم اصغر من مجموع ا ح + ا د بل يجب ان يكون نصف القطر الاكبر الذى هو خط ا د المستقيم اصغر من مجموع ا ح + ح د فعلى هذا متى كان رسم المثلث ممكنا فالمحيطان المرسومان من مركزى ح و د يتقاطعان فى نقطتى ا و ب ويثبت المطلوب

(الدعوى الثالثة عشر النظرية)

اذا كان بعد ح د الذى بين المركزين مساوياً لمجموع نصفى قطر ح ا و ا د تماس هاتان الدائرتان فى الخارج فحيث ان ح ا و ا د نصفى قطرى الدائرتين مساويان لبعد ح د علم انه لم تكن نقطة مشتركة الا نقطة ا وماعداها لا تكون

مشتركة لانه لو وجد نقطتان مشتركتان لكان يمكن رسم مثلث ويكون البعد بين المركزين اصغر من مجموع نصفى القطرين كما صرح به فى الدعوى التى تقدمت وهذا خلاف ما فرض فعلى هذا يثبت المطلوب بانه متى كان البعد بين المركزين مساويا لمجموع نصفى القطرين تتماس الدائرتان فى الخارج

(الدعوى الرابعة عشر النظرية)

اذا كان بعد حء الذى بين مركزى الدائرتين مساويا للتفاضل بين نصفى القطرين ح ا و ا ء فتتماس هاتان الدائرتان فى الداخل لانه لم يكن لمحيطهاتين الدائرتين نقطة مشتركة الا نقطة ا فقط ولم يوجد نقطة مشتركة اخرى لانه لو وجدت نقطة مشتركة اخرى لكان نصف القطر الاكبر أصغر من مجموع نصف قطر ا ح و ح ء الذى هو البعد بين المركزين وفى هذه الدعوى التفاضل بين نصفى القطرين مساو للبعد الذى بين المركزين و ا ء نصف القطر الاكبر مساو لبعد ح ء + ا ح فعلى هذا لم يكن لهذين المحيطين الا نقطة مشتركة فقط ومن هذا ثبت ان هاتين الدائرتين تتماسان فى الداخل

نتيجة الدائرتان المماستان يكون مركزاهما ونقطة تماسهما على خط مستقيم سواء كان التماس فى الداخل أو فى الخارج

تنبيه كل الدوائر التى مراكزها على خط حء ومحيطاتها تمر من نقطة ا تكون متماسة ولم يكن لها نقطة مشتركة الا نقطة ا وان اخرج عمود اه من نقطة ا على خط ح ء المستقيم يكون ذلك العمود مماسا مشتركا لجميع تلك الدوائر

(الدعوى الخامسة عشر النظرية)

فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية اذا كانت الزوايا المركزية متساوية فتكون أقواسها متساوية وبالعكس اذا كانت الاقواس متساوية فتكون زواياها المركزية ايضا متساوية يعنى اذا كانت زاوية احب المركزية مساوية لزاوية ءحه الاخرى يكون قوس اب = قوس ءه وبالعكس اذا كان قوس اب = قوس ءه تكون زاوية احب المركزية مساوية لزاوية ءحه أولا من كون زاوية احب مساوية لزاوية ءحه يمكن ان يوضع احدى هاتين

الدائرتين على الاخرى بان يكون مركز ح على مركز ح ولكون انصاف الاقطار المحيطة بهاتين الزاويتين متساوية تقع نقطة ا على نقطة د ونقطة ب على نقطة هـ فعلى هذا يلزم ان يقع قوس اب ايضا على قوس دهـ ويتحدان والا لكان فى هذين المحيطين نقط على ابعاد غير متساوية من المركز وهذا خلاف لتساوى الدوائر فلذا ينطبق قوس اب على دهـ ويساويه ويثبت المطلوب

ثانيا اذا كان قوس اب مساويا قوس دهـ فتساوى زاوية احب زاوية دحهـ لانه ان لم تكن هاتان الزاويتان متساويتين بان كانت احب اكبر فتى اخذت زاوية احو مساوية لزاوية دحهـ من هذه الزاوية الكبرى فعلى ماصرح به فى الشق الاول من هذه الدعوى يكون قوس او مساويا قوس دهـ ولكون قوس اب مساويا القوس دهـ بالفرض يلزم ان يكون قوس او مساويا القوس اب واذن للزم تساوى الجزء بالكل وهذا خلاف فعلى هذا لا يمكن ان تكون زاوية احب اكبر او اصغر من زاوية دحهـ وتتساوى الزاويتان ويثبت المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية)

اذا كانت النسبة بين زاويتى احب و دحهـ المركزيتين كالنسبة بين عددين صحيحين فى دائرة واحدة او فى دوائر متساوية فتكون النسبة بين قوس اب وقوس دهـ كالنسبة بين هذين العددين وفى هذا تحدث الاربعة المتناسبة وهى زاوية احب : زاوية احهـ :: قوس اب : قوس دهـ

فتى كانت النسبة بين احب و دحهـ كالنسبة بين عدد ٧ وعدد ٤ الصحيحين او اذا جعلت زاوية م مقياسا مشتركا على ان تشتمل فى زاوية احب سبع مرات وفى زاوية دحهـ اربع مرات ولكون اقسام الزوايا وهى احو و وحو و وحح الخ و دحل و لحك الخ متساوية يلزم ان تكون اقسام الاقواس وهى او و وو و وح الخ و دل و لك الخ متساوية فعلى هذا تكون نسبة قوس اب

الكامل الى قوس د هـ الكامل كنسبة ٧ اعداد صحيحة الى ٤ اعداد صحيحة ويظهر انه يمكن وضع عدد آخر دون ٧ و ٤ ويثبت بهذه الطريقة فعلى ماذكر يثبت المطلوب ان النسبة بين قوسي اب و د هـ كالنسبة بين زاويتي احب و د ح هـ

تنبيه اذا كانت النسبة بين قوسي اب و د هـ كالنسبة بين عددين صحيحين عكس ماتقدم تكون النسبة بين زاويتي احب و د ح هـ المركزيتين كالنسبة بين هذين العددين الصحيحين وحينئذ يكون نسبة احب : د ح هـ :: اب : د هـ لانه متى كانت اقسام الاقواس التى هى او و و و لخ و د ل و ل ى لخ متساوية تكون اقسام الزوايا وهى احو و و ح و لخ وايضا د ح ل و ل ى ح لخ متساوية

(الدعوى السابعة عشر النظرية)

دائما النسبة التى بين زاويتى احب و ا ح د على اى حالة كانت هى كالنسبة بين قوسى اب و ا د المرسومين بين انصاف الاقطار المحيطة بتلك الزوايا التى جعلت رؤسها مراكز فى وضعت الصغرى منهما على الكبرى فان لم يكن التناسب الذى ذكر آنفا بجعله يعنى ان لم تكن نسبة زاوية احب : ا ح د :: قوس اب : قوس ا د وكانت كنسبة قوس ا كبر او اصغر من قوس ا د بان كانت النسبة كنسبة قوس اب الى قوس ا و الاكبر من قوس ا د يعنى اذا كانت نسبة زاوية احب : ا ح د :: اب : ا و فيقسم قوس اب اقساما متساوية يكون كل قسم منها اصغر من جزء و د وحينئذ تقع نقطة من نقط التقسيم بين نقطتى د و و فرضا وقعت نقطة التقسيم فى المحل المشار اليه بنقطة هـ ووصل خط ح هـ المستقيم فمن حيث ان قوسى اب و ا هـ منقسمان الى اقسام متساوية فيلزم ان تكون النسبة بين هذين القوسين كالنسبة بين عددين صحيحين فعلى ماذكر فى الدعوى التى تقدمت تكون نسبة احب : ا ح هـ :: اب : ا هـ ولكون المقدم الاول والثانى من هذا التناسب والتناسب الذى تقدم متساويين

تكون تواليهما متناسبة ويكون نسبة ا ح ى : ا ح هـ :: ا و : ا هـ
لكن من خواص الاربعة المتناسبة انه اذا كان الاول اعظم من الثانى لابد ان يكون الثالث اعظم من الرابع وعلى هذا من يكون قوس او اكبر من قوس اهـ ان تكون زاوية ا ح ى اعظم من زاوية ا ح هـ واذا لزم ان يكون الاصغر اعظم من الاكبر وهذا خلف فاذا علم ان نسبة ا ح ب الى ا ح ى كنسبة قوس ا ب الى القوس الذى هو اكبر من قوس ا ى وبمثل هذا يثبت ان الرابع المتناسب لم يكن اصغر من قوس ا ى ومن ثم يثبت المطلوب بان نسبة زاوية ا ح ب : زاوية ا ح ى :: قوس ا ب : قوس ا ى

(نتيجة) حيث ان الزاوية المركزية بينها وبين القوس المحجوز بين طرفيها مناسبة وتعلق لانه لو تزيد أو تنقص على أى نسبة فلابد ان ذلك القوس يتزايد أو يتناقص على منهاج تلك النسبة فمن أجل ذلك يرى ان وضع احد المقدارين لقياس الآخر حقيق فمن ذا نأخذ فيما بعد قوس ا ب لقياس زاوية ا ح ب الا ان الزوايا التى تقاس بالاقواس حين تقديرها لابد من ان تكون الاقواس مرسومة بنصف قطر مساو فتامل لان هذا الفرض ملحوظ فى جميع الدعاوى التى تقدمت

(تنبيهات) الاول علم ان قياس المقدار بالمقدار الذى من جنسه أوفق للطبع فعلى هذا يمكن تقدير سائر الزوايا بالزاوية القائمة فعلى فرض ان الزاوية القائمة أحد تعين الزاوية الحادة بالسر المتمادى بين ١ و ٠ وتحصر المنفرجة بالعدد المتمادى بين ١ و ٢ ولكون التعين والتقدير بهذا الطريق لم يكن سهلا وقد ظهر ان تقدير الزوايا باقواس الدوائر موافق للعمل وثابت بالتجربة وان كان تقدير الشئ بغير جنسه ليس مما وافق الاصول فلا عسر فى استنباط المقياس الحقيق بين الزوايا بواسطة تلك الاقواس لانه اذا نظر الى النسبة بين القوس الذى هو مقدار أى زاوية وبين القوس الذى هو ربع المحيط فهى كالنسبة بين تلك الزاوية وبين القائمة فظهر ان القوس يكون مقدارا حقيقيا للزاوية

تنبيه ٢ كل ماثبت فى الثلاث دعاوى التى تقدمت من تقدير الزوايا بالاقواس فانه جار على تقدير القطاع بالقوس لانه اذا كانت الزوايا متساوية تكون الاقطع متساوية وعموما تكون هذه الاقطع متناسبة بالزوايا فعلى هذا تكون النسبة بين قطاعى ا ح ب و ا ح ى كالنسبة بين قوسى ا ب و ا ى اللذين هما قاعدتان لهذين القطاعين سواء كانا فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية فعلم ان اقواس الدوائر تستعمل فى تقدير الزاوية والقطاع

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

مقدار زاوية ب ا ى المرسومة داخل الدائرة هو نصف قوس ب ى الواقع بين محيطى تلك الزاوية فاذا فرض ان المركز داخل الزاوية ورسم قطر ا ه ووصل نصفا القطر ح ب و ح ى فزاوية ب ح ه الخارجة عن مثلث ا ب ح مساوية لمجموع زوايتى المثلث وهما ح ا ب و ا ب ح (انظر المقالة الاولى) ولكون مثلث ب ا ح متساوى الساقين تكون زاوية ب ح ه ضعف زاوية ب ا ح وحيث ان قوس ب ه هو مقدار الزاوية ب ح ه يكون مقدار زاوية ب ا ح نصف قوس ب ه وبمثل هذا يثبت ان مقدار زاوية ح ا ى يكون نصف قوس ب ى فلذا يكون مقدار ب ا ح + ح ا ى أو ب ا ى نصف قوس ب ه + ه ى يعنى نصف قوس ب ى ويثبت المطلوب وأما فى الصورة الثانية وهى ان يكون مركز ح خارجا عن زاوية ب ا ى فاذا رسم قطر ا ه يكون نصف قوس ب ه مقدار الزاوية ب ا ه كما صرح به فى هذه الدعوى وايضا نصف قوس ى ه يكون مقدار الزاوية ى ا ه فعلى هذا يكون نصف التفاضل بين هذين القوسين وهو نصف قوس ب ى مقدار الزاوية ب ا ى ومن ثمة يكون مقدار جميع الزوايا المرسومة داخل الدائرة هو نصف الاقواس الواقعة بين محيطيها و يثبت المطلوب

(نتيجة ١) الزوايا الواقعة فى قطعة واحدة مثل زاويتى ب ا ح و ب ى ح الخ متساوية لان نصف قوس ب ح يكون مقدار كل واحدة منها

(نتيجة ٢) زاوية ب ا ى المرسومة فى نصف المحيط يكون ربع المحيط مقدارا

لها واذا أريد اثباتها على وجه آخر نقول اذا وصل نصف قطر اح فمن كون مثلث ب اح متساوى الساقين تكون زاوية ب اح مساوية لزاوية اب ح وأيضا من كون مثلث ح ا ء متساوى الساقين تكون زاوية ح ا ء مساوية لزاوية ا ء ح وحيث انه اذا اجتمعت هذه الاشياء المتساوية تكون الحواصل متساوية فيكون ب ا ح + ح ا ء أو ب ا ء = ا ب ء + ا ء ب فعلى هذا مجموع ب و ء زوايتى مثلث ا ب ء يكون مساويا لزاوية ب ا ء أو مجموع الزوايا الثلاث فى المثلث مساو لضعف زاوية ب ا ء

(نتيجة ٣) الزوايا التى مثل زاوية ب اح الواقعة فى قطعة اكبر من نصف المحيط تكون حادة لان نصف قوس ب و ح الاصغر من نصف المحيط يكون مقدارا لها وأيضا الزوايا التى مثل ب و ه الواقعة فى قطعة اصغر من نصف المحيط تكون منفرجة لان مقدارها هو نصف القوس الاكبر من نصف المحيط

(نتيجة ٤) مجموع الزاويتين المتقابلتين من ا ب ح ء ذى أربعة اضلاع المرسوم داخل الدائرة اللتين هما ا و ح يكون مساويا قائمتين لان نصف قوس ب ح ء يكون مقدار الزاوية ب ا ء ونصف قوس ب ا ء هو مقدار ب ح ء فعلى هذا يكون نصف المحيط مقدارا لمجموع زاويتى ب ا ء + ا ح ء ومن ثمة يكون مجموع الزاويتين المتقابلتين مساويا قائمتين

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

(شكل ٦٩) نصف قوس ام ح الواقع بين محيطى زاوية ب اح الحاصلة من الوتر والخط المماس يكون مقدارا لها فاذا رسم قطر ا ء من ا نقطة التماس فذلك القطر يكون عمودا على الخط المماس ولذا تكون زاوية ب ا ء قائمة وبهذا يكون ام ء نصف المحيط مقدارا لتلك الزاوية ويكون نصف قوس ء ح مقدار الزاوية ء اح فعلى هذا ظهر ان نصف قوس ام ء ونصف قوس ء ح يعنى نصف قوس ا م ء يكون مقدار الزاوية ب ا ء + ء اح اعنى زاوية ب اح ومن ثمة يكون مقدار الزاوية ب ا ح

هو نصف قوس ا ح الواقع بين محيطيها

(الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية)

(الدعوى الاولى العملية)

(شكل ٧٠) طريقة تنصيف خط ا ب المستقيم المحدود فتجعل نقطة ا و ب مركزا وبعد أكبر من نصف خط ا ب يرسم قوسان متقاطعان في نقطة ى بأن تكون نقطة ى على ابعاد متساوية من نقطتى ا و ب وكذا تعين نقطة هـ برسم قوسين تحت خط ا ب وتكون أيضا نقطة هـ على ابعاد متساوية من نقطتى ا و ب فاذا وصل خط ى هـ بين نقطتى هـ و ى فالخط الموصول يقطع خط ا ب وينصفه لانه من كون كل واحدة من نقطتى ى و هـ على ابعاد متساوية من نقطتى ا و ب يلزم ان يكونا واقعتين على العمود المخرج من وسط خط ا ب وحيث انه لا يمكن الاوصل خط مستقيم بين نقطتى ى و هـ فيكون خط هـ ى هو العمود المذكور وينقسم خط ا ب فى نقطة ح الى قسمين متساويين ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية العملية)

(شكل ٧١) طريقة اخراج عمود من نقطة ا الواقعة على خط ب ح المفروض

تعين نقطتا ب و ح على ان تكونا على ابعاد متساوية من نقطة ا ثم تجعل نقطة ب و ح مركزا وبنصف قطر أكبر من بعد ب ا يرسم قوسان متقاطعان فى نقطة ى فاذا وصل خط ا ى يكون هو العمود المطلوب لان نقطة ى على ابعاد متساوية من نقطتى ب و ح فتكون واقعة على العمود المخرج من وسط خط ب ح ومن ثمة كان خط ا ى هو العمود المذكور

تنبيه اعلم ان انشاء زاوية ب ا ى القائمة على خط ب ح من نقطة ا

يكون كما ذكر

(الدعوى الثالثة العملية)

(شكل ٧٢) طريقة انزال عمود على خط ب د المستقيم من نقطة ا الخارجة عنه

تجعل نقطة ا مركزا ويرسم قوس بنصف قطر كاف ان يقطع خط ب د في نقطتى ب و د ثم تجعل نقطة ب و د مركزا وتعين نقطة هـ برسم قوسين متقاطعين ويوصل خط اهـ فالخط الموصول هو العمود المطلوب لان كلا من نقطتى ا و هـ على ابعاد متساوية من نقطتى ب و د ويكون خط اهـ هو العمود المخرج من وسط خط ب د ويثبت المطلوب

(الدعوى الرابعة العملية)

(شكل ٧٣) طريقة انشاء زاوية مساوية لزاوية د من ا احد نقط خط اب

تجعل ا نقطة الرأس مركزا وباى نصف قطر كان يرسم قوس و هـ ويعين محيطا زاوية د ثم تجعل نقطة ا مركزا ويرسم قوس غير محدود ب ح بنصف القطر المساوى خط د هـ ويوصل وتر هـ و وتجعل نقطة ب مركزا وبنصف قطر مساو لوتر هـ و يرسم قوس يقطع قوس ب ح فى نقطة ح فاذا وصل خط ا ح فزاوية ب ا ح الحادثة تكون مساوية لزاوية د المفروضة لانه اذا وصل وتر ب ح فحيث ان قوس ب ح و هـ و استدارا بانصاف أقطار متساوية ووترا هـ و و ب ح متساويان وأقواس الاوتار المتساوية الواقعة فى الدوائر المتساوية تكون متساوية فلذا تتساوى زاوية ب ا ح و هـ د و لتساوى قوس ب ح و هـ و اللذان هما معياران لتلك الزاويتين ويثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ٧٤) طريقة تقسيم قوس معلوم أو زاوية مفروضة الى قسمين متساويين أولا اذا أريد تقسيم قوس اب بمتساويين تجعل نقطة ا و ب مركزا وبنصف قطر واحد يرسم قوسان متقاطعان فى نقطة ء فاذا وصل بين نقطتى ء و ح بخط حء المستقيم فكل نقطة من نقطتى ح و ء تكون على ابعاد متساوية من ا و ب نهايتى الوتر المذكور ومن ثمة يكون خط حء الموصول هو العمود المخرج من وسط الوتر المذكور ويقسم قوس اب فى نقطة هـ الى قسمين متساويين (انظر المقالة الثانية)

وثانيا اذا أريد تقسيم زاوية احب الى قسمين متساويين فتجعل ح رأس تلك الزاوية مركزا ويرسم قوس اب ثم اذا أجريت العمليات كما ذكرسابقا فالخط حء يقسم زاوية احب الى قسمين متساويين لكونه قسم قوس اب الذى هو مقدارها فعلى هذه الطريقة التى ذكرت يمكن انقسام كل واحد من قوسى اهـ و هـب وأجزائهما على التوالى الى قسمين متساويين وكذلك يكون تقسيم أى زاوية مفروضة أوقوس معلوم الى أقسام متساوية

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ٧٥) طريقة رسم خط موازلخط بح المعلوم يمر من نقطة ا المفروضة

تجعل نقطة ا مركزا وبنصف قطرله مقدار كاف يرسم قوس هو غير محدود وتجعل نقطة هـ مركزا وبنصف القطر المذكور يرسم قوس ار ويؤخذ قوس هء مساويا لقوس ار فاذا وصلت نقطتا ا و ء بخط مستقيم فالخط الموصول هو الموازى المطلوب لانه اذا وصل اهـ فلتساوى قوس ار و هء المرسومين بنصف قطر واحد يلزم تساوى الزاويتين اللتين مقدارهما القوسان المذكوران ومن تساوى الزاويتين المتبادلتين يكون خط اء موازيا لخط بء (انظر المقالة الاولى) ويثبت المطلوب

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ٧٦) طريقة تعيين الزاوية الثالثة من المثلث اذا كانت زاويتا ا و ب معلومتين

يرسم خط ء هـ المستقيم غير محدود ومن نقطة هـ الواقعة عليه اذا رسمت زاوية ء هـ ح مساوية لزاوية ا وزاوية ح هـ ر مساوية لزاوية ب فتكون زاوية ر هـ و مساوية للزاوية الثالثة المطلوبة من المثلث لان تلك الزوايا الثلاث مساوية لقائمتين وكذا ثلاثة زوايا المثلث فمن تساوى الزاويتين القائمتين تتساوى الزاويتان الثالثتان ويثبت المطلوب

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ٧٧) طريقة رسم مثلث علم ضلعاه ب و ح وزاوية ا التى بينهما

يرسم خط ءو المستقيم غير محدود ومن نقطة ء ترسم زاوية وءهـ مساوية لزاوية ا المعلومة ويؤخذ ءر مساويا لضلع ب و ءع مساويا لضلع ح فاذا وصل ع ر فمثلث ع ر ء هو المثلث المطلوب لان ضلعيه والزاوية التى بينهما أنشئت مساوية بالعمل لضلع ب و ح وزاوية ا

(الدعوى التاسعة العملية)

طريقة رسم مثلث علم منه ضلع وزاويتان

فاعلم انه اما ان يكون كلا الزاويتين مجاورا للضلع المعلوم واما ان تكون احداهما مجاورة والاخرى مقابلة فان كانت بالصورة الثانية تستخرج الزاوية الثالثة من المثلث على ما ذكر فى الدعوى السابعة وحين تعلم الزاويتان المجاورتان لذلك الضلع يعمل كما سيأتى

(شكل ٧٨) يرسم خط ء هـ المستقيم مساويا للضلع المعلوم ومن نقطة ء ترسم زاوية هـ ء و مساوية لاحدى المتجاورتين ومن نقطة هـ ترسم زاوية ء هـ ر مساوية لاحداهما الاخرى فيتقاطع خطا ء و و هـ ر

فى نقطة ح ويكون مثلث ءهح الحادث هو المثلث المطلوب

(الدعوى العاشرة العملية)

(شكل ٧٩) طريقة رسم مثلث اذا كانت اضلاعه الثلاثة ا و ب و ح معلومة

يرسم خط ءهـ مساويا لضلع ا ثم تجعل نقطة هـ مركزا ويرسم قوس بنصف قطر مساو لضلع ب ويرسم قوس من نقطة ء بنصف قطر مساو لضلع ح يقطع القوس الاول فى نقطة و فاذا وصل خط ءو وهـو فمثلث ءهو الحادث هو المثلث المطلوب

تنبيه اذا كان أحد تلك الاضلاع اكبر من مجموع الآخرين فالقوسان لا يتقاطعان واما اذا كان مجموع كل ضلعين أكبر من الضلع الآخر فدائما يكون اجراء العمل ممكنا

(الدعوى الحادية عشرة العملية)

(شكل ٨٠) طريقة رسم مثلث علم منه ضلعان ا و ب وزاوية ح المقابلة لضلع ب وهذه الدعوى على وجهين

الوجه الاول هو ان تكون زاوية ح قائمة أو منفرجة فتنشأ زاوية ءهو مساوية لزاوية ح ويؤخذ خط ءهـ مساويا لضلع ا وتجعل نقطة ء مركزا ويرسم قوس بنصف قطر مساو لضلع ب و يقطع ضلع هو فى نقطة و فاذا وصل خط ءو فمثلث ءهو الحادث هو المثلث المطلوب

اعلم ان فى هذا الوجه الاول لابد أن يكون ضلع ب أكبر من ضلع ا لان زاوية ح متى كانت قائمة أو منفرجة فلابد لضلع المثلث المقابل لها ان يكون أكبر

(شكل ٨١) الوجه الثانى هو ان تكون زاوية ح حادة وضلع ب أكبر من ا فحينئذ اذا أجرى العمل كما صرح به فى الوجه الاول فيرسم مثلث ءهو ويكون المثلث المطلوب

(شكل ٨٢) وأما اذا كانت زاوية ح حادة وكان ضلع ب أصغر من ضلع ا

فالقوس المرسوم فى نقطة هـ بنصف قطر هـو المساوى لضلع ب يقطع ضلع ءو فى نقطتى و و ر وتكون كل واحدة من هاتين النقطتين واقعة على نقطة ء فاذا وصل خطا هـو و هـر فكل من مثلثى ءهـو و ءهـر الحادثين يوافق المطلوب

تنبيه اذا كان فى المثلث ضلع ب أصغر من العمود النازل من رأس هـ على قاعدة ءو لايمكن اجراء العمل المذكور بوجه من الوجوه

(الدعوى الثانية عشرة العملية)

(شكل ٨٣) طريقة رسم متوازى الاضلاع الذى علم منه ضلعا ا و ب المتجاوران وزاوية حـ التى بينهما

فيرسم خط هـء مساويا الضلع ا ومن نقطة ء ترسم زاوية وءهـ مساوية لزاوية حـ ويؤخذ خط ءو مساويا الضلع ب وتجعل نقطة و مركزا وببعد ءهـ يرسم قوس وأيضا تجعل نقطة هـ مركزا وببعد ء و يرسم قوس آخر يقطع القوس الاول فى نقطة ر فاذا وصل هـر و ور فشكل ءهـر و هو متوازى الاضلاع المطلوب

لانه يلزم من تساوى الاضلاع المتقابلة فيه بالعمل ان يكون ذلك الشكل متوازى الاضلاع (انظر مقالة ١) وحيث ان اضلاعه وزواياه تساوى بالعمل الضلعين المعلومين والزاوية المفروضة يكون ذلك الشكل هو المتوازى الاضلاع المطلوب

(نتيجة) اذا كانت الزاوية المعلومة المفروضة قائمة وكان الضلعان المتجاوران مختلفين يكون ذلك الشكل مستطيلا واذا تساوى الضلعان مع قيامهما يكون مربعا

(الدعوى الثالثة عشرة العملية)

طريقة تعيين المركز المجهول لدائرة مفروضة أو قوس معلوم

(شكل ٨٤) فنعين ثلاث نقط ا و ب و حـ كيفما اتفق فى المحيط المفروض أو القوس المعلوم ويوصل أو يتوهم وصل وترى اب و بحـ ثم ينصف هذان الوتران بعمودى ءهـ و ور

فنقطة ح التى هى تقاطع العمودين المذكورين هى المركز المطلوب
لان كل واحد من هذين العمودين يمر بالمركز فمن هذا ظهر ان نقطة ح
التقاطع المشترك هى المركز المطلوب
تنبيه طريقة رسم دائرة تمر من ثلاث نقط مفروضة مثل ا و ب و ح
كطريقة رسم دائرة على مثلث ا ب ح كما صرح به

(الدعوى الرابعة عشرة العملية)

طريقة رسم خط مماس لدائرة معلومة من نقطة مفروضة
(شكل ٨٥) اذا كانت نقطة ا المفروضة واقعة على محيط الدائرة يرسم نصف قطر اح فاذا أخرج عمود اى على النصف قطر المذكور من نقطة ا فهذا العمود هو المماس المطلوب
(شكل ٨٦) واذا كانت نقطة ا واقعة خارج الدائرة كما يرى من هذا الشكل يوصل بين نقطة ا وبين مركز الدائرة بخط اح المستقيم وينصف خط اح المذكور فى نقطة ح وتجعل نقطة ح مركزا وببعد اح يرسم محيط دائرة فاذا وصل خط اب المستقيم بين نقطة ا ونقطة ب التى هى تقاطع المحيط المرسوم بمحيط الدائرة المفروضة فخط اب هو المماس المطلوب
لانه اذا وصل حب فزاوية حبا الحادثة تكون قائمة لوقوعها فى نصف الدائرة فلذا خط اب يكون مماسا بكونه عمودا على نهاية نصف قطر بح
تنبيه اعلم انه متى كانت نقطة ا المفروضة واقعة خارج الدائرة يمكن ان يرسم منها خطان مماسان للدائرة المذكورة وهما اب و اى ويكونان متساويين لان فى مثلثى حاب و حاى القائمى الزاوية وتر اح مشترك وضلعى بح و حى متساويان لكونهما انصاف أقطار
فمن تساوى هذين المثلثين يكون اى = اب وحينئذ تكون زاوية حاى مساوية لزاوية حاب

(الدعوى الخامسة عشرة العملية)

(شكل ٨٧) طريقة رسم دائرة داخل مثلث ا ب حـ المفروض تماس باضلاعه الثلاثة

فاقول اذا نصفت زاويتا ا و ب من المثلث المذكور بخطى ا ح و ب ح فهذان الخطان يتقاطعان فى نقطة ح . ومن نقطة ح اذا أنزلت عماد ح د و ح هـ و ح و على ثلاثة اضلاع المثلث فهذه العواميد تكون متساوية لان زاويتى د ا ح و ح ا و متساويتان بالعمل وزاويتى ا د ح و ا و ح أيضا متساويتان لقيامهما فتبقى زاوية ا ح د الثالثة مساوية كذلك لزاوية ا ح و ولاشتراك ضلع ا ح فى مثلثى ا ح د و ا ح و ولتساوى مثنى الزوايا المجاورة له فيكون المثلثان المذكوران متساويين ولذا يكون ح د = ح و وبمثل هذا يثبت ان مثلثى ب ح د و ب ح هـ أيضا متساويان ويكون ح د = ح هـ فعلى هذا تكون اعمدة ح د و ح هـ و ح و متساوية فاذا جعلت نقطة ح مركزا وبنصف قطر ح د رسم محيط دائرة فهذا المحيط يكون هو المحيط المرسوم داخل مثلث ا ب حـ المماس لاضلاعه الثلاثة لان ضلع ا ب هو العمود المخرج من نهاية نصف قطر ح د ومن هذا يكون مماسا لتلك الدائرة وكذلك ضلعا ب حـ و ا حـ يكونان مماسين كما تقدم وتكون تلك الدائرة المرسومة مماسة لاضلاعه الثلاثة وبهذا يثبت المطلوب

تنبيه الثلاثة خطوط التى تنصف ثلاث زوايا مثلث لابد ان تتلاقى فى نقطة واحدة

(الدعوى السادسة عشرة العملية)

(شكل ٨٨ و ٨٩) طريقة رسم قطعة دائرة على خط ا ب المستقيم المفروض تكون قابلة لاحاطة زاوية حـ المعلومة يعنى المطلوب رسم قطعة دائرة تكون كل زاوية مرسومة فى تلك القطعة مساوية لزاوية حـ المفروضة

فاقول يمد خط ا ب المستقيم جهة ب ومن نقطة ب ترسم زاوية
هـ ب ى مساوية لزاوية ح المفروضة ويقام عمود ب ع على خط هـ ب
وعمود د ع على وسط خط ا ب فنقطة ع التي هي تقاطع العمودين
تجعل مركزا وبنصف قطر ع ب ترسم دائرة فقطعة هذه الدائرة وهي ا ط ب
هي القطعة المطلوبة.

لان خط ب هـ المستقيم يمد جهة ب وحيث ان خط ب و عمود مخرج من
نهاية نصف قطر ع ب يكون مماسا للدائرة ويكون نصف قوس ا ى ب
مقدارا لزاوية ا ب و

وحيث ان نصف قوس ا ى ب صار معيار الزاوية ا ط ب وهي
محيطية ظهر انها مساوية لزاوية ا ب و أو لمساويتها هـ ب ى والمعنى
ان زاوية ا ط ب مساوية لزاوية ح المفروضة ومن ثمة ثبت المطلوب
وهو ان جميع الزوايا المرسومة في قطعة ا ط ب تكون مساوية لزاوية
ح المفروضة

تنبيه اذا كانت الزاوية المفروضة قائمة فالقطعة المطلوبة تكون هي نصف
الدائرة المرسومة على قطر ا ب

(الدعوى السابعة عشرة العملية)

(شكل ٩٠) طريقة استخراج عدد تناسب الخطين المستقيمين المفروضين
ا ب و ح ى وبينهما مقياس مشترك

أولا يوضع خط ح ى الاصغر على خط ا ب الا كبر ثم تعين مقدار عدد اشتمال
الخط الا كبر على خط ح ى الاصغر فان اشتمل عليه مرتين وبقي ب هـ فضلة
توضع على خط ح ى فاذا اشتمل ح ى عليها مرتين وبقيت فضلة د هـ توضع
هذه الفضلة على فضلة ب هـ

فاذا اشتملت ب هـ عليها مرة واحدة وبقيت ى و توضع ى و وهي الفضلة
الثانية على ب هـ وهي الفضلة الاولى فاذا اشتملت عليها مرة واحدة وبقيت
د ب فضلة توضع هذه الفضلة الثالثة وهي ب د على الفضلة الثانية وهي

د و ويعين كم اشتمالها عليها وأيضا اذا وضعت الفضلة الباقية على الفضلة السابقة وهكذا حتى اشتملت السابقة على الباقية بتمامها تكون هذه الفضلة الاخيرة مقياسا مشتركا للخطين المستقيمين المفروضين فاذا جعلت تلك الفضلة الاخيرة كواحد تقدر بها قيمة الفضلات التى تقدمت وقيمة الخطين المفروضين ويتعين من هذا التقدير نسبة تعدد الخطين المذكورين

مثلا اذا كانت فضلة ـد الاخيرة تشتمل عليها دو مرتين تكون مقياسا مشتركا للخطين المفروضين

مثلا اذا فرض ان ـد = ١ يكون دو = ٢ لكن فضلة دو اشتملت عليها فضلة ـهـ مرة وبقيت ـد فضلة فتكون ـهـ = ٣ وحيث ان ـهـ اشتمل عليها خط جد مرة وبقيت دو فضلة يكون جد = ٥

واخيرا حيث ان خط جد احتواه خط اب مرتين وبقيت ـهـ فضلة يكون اب = ١٣ ومن ثمة ظهر ان النسبة بين خطى اب و جد كالنسبة بين عددى ١٣ و ٥ فاذا كان خط جد واحدا فنسبته اليه تكون $=\frac{١٣}{٥}$

واذا كان خط اب واحدا يكون خط جد $=\frac{٥}{١٣}$

تنبيه هذه العمليات التى أجريت فى هذه الدعوى هى عين العمليات التى أجريت فى استخراج القاسم المشترك الاعظم فلا حاجة الى بسط اثبات آخر فى هذا المقام

وتارة يجرى العمل متواليا والفضلة الاخيرة لم يمكن ان تشتمل عليها التى قبلها اشتمالا تاما واذا يستدل ان لا مقياس مشترك بين هذين الخطين وكل يسمى اصم كما بين ضلع المربع وقطره وسيذكر ان شاء الله تعالى بحثه ولا توجد بينهما نسبة تحقيقية وانما يجرى العمل مهما أمكن حتى تصير الفضلة الاخيرة أدنى جزء لا يعبأ به واذا تكون النسبة بينهما تقريبية تكاد ان تكون تحقيقية

(الدعوى الثامنة عشرة العملية)

(شكل ٩١) طريق استخراج المقياس المشترك بين زاويتي ا و ب ان كان بينهما مقياس مشترك وبه يوجد عدد تناسب هاتين الزاويتين فاذا جعلت رأس الزاويتين مركزا ورسم قوسا جـ د و هـ و بانصاف أقطار متساوية فهذان القوسان يكونان مقدارين لهما ثم يقدر القوسان كما صرح به في الدعوى التي تقدمت لانه يمكن تطبيق الاقواس المتساوية أنصاف الاقطار كتطبيق أحد المستقيمين على الآخر كما لا يخفى وبهذا العمل يحصل المقياس المشترك بين قوسي جـ د و هـ و ان كان موجودا ويوجد نسبة تعدادا القوسين وهي عين ما بين الزاويتين وان كان قوس د ر مقياسا مشتركا بين قوسي جـ د و هـ و فزاوية د ا ر تكون معيارا للزاويتين وهو الظاهر

تنبيه بهذا يمكن تعيين مقدار زاوية بتقدير القوس الذي هو معيارها مع المحيط الكامل مثلا اذا كانت نسبة قوس جـ د الى المحيط كنسبة عدد ٣ الى عدد ٢٥ يكون مقدار زاوية ا $= \frac{٣}{٢٥}$ من أربع قوائم او $= \frac{١٢}{٢٥}$ من قائمة وتارة لا يوجد المقياس المشترك بين الزاويتين وحينئذ يجري العمل على التوالي حتى ينتهي الى نسبة تقريبية تكاد ان تكون تحقيقية كما تقدم وهذا ظاهر

(تمت المقالة الثانية)

المقالة الثالثة

فى خصوصية تناسب الاشكال

الحدود

١ الاشكال المتساوية مساحة تسمى اشكالا متكافئة أو متقاومة مثلا قد يمكن تكافؤ الشكلين مساحة وان كانا مختلفى الهيئة مثلا يمكن ان تكافئ الدائرة مربعا او المثلث مستطيلا وهكذا الخ

فالاشكال المتساوية كالدوائر المتساوية انصاف الاقطار والمثلثات المتساوية الاضلاع المتناظرة أعنى الاشكال التى اذا وضع أحدها على الآخر تنطبق كل نقطة على نظيرتها كمال الانطباق تسمى أشكالا متساوية من باب أولى •

٢ اذا تساوت الزوايا المتناظرة من شكلين وتناسبت الاضلاع فهذان الشكلان يسميان متشابهين والاضلاع المتناظرة تطلق على الاضلاع المتحدة فى الوضع أعنى الاضلاع التى تحيط بالزوايا المتساوية وهى مايسمى زوايا متناظرة

كل شكلين متساويين فهما متشابهان واما الاشكال المتشابهة فتارة لايكون بينهما شئ من المساواة أصلا فمن هذا علم ان كل شكلين متساويين متشابهان ولا عكس

٣ الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة فى الدوائر المختلفة أعنى غير المتساوية تطلق على الاقواس والقطع والقطوع التى تقابل الزوايا المركزية المتساوية

(شكل ٩٢) مثلا اذا ساوت زاوية و زاوية ا فقوس ب ح يشابه قوس د هـ وقطاع ا ب ح يشابه قطاع د و هـ وهكذا الخ

٤ (شكل ٩٣) ارتفاع الشكل المتوازى الاضلاع هو عمود هـ و

من المتقدمين كاقليدس وغيره وكثير من المتأخرين استعملوا لفظ المساواة فى مطلق الاشكال المتساوية السطوح وان كانوا ذكروا فى تآليفهم انه قد يساوى المثلث مربعا و الدائرة مستطيلا وأما الزاندر مؤلف هذا الكتاب فقد استعمل لفظ المساواة فى الاشكال الممكنة التطبيق وخصص ذلك بها وأما الاشكال المتساوية مساحة فقط فسميت عنده متكافئة أو متقاومة ففى هذه الترجمة سلكت الطرق على اسلوب المؤلف لزاندر اقتداء بتالية فسميت الاشكال التى يمكن تطبيقها اشكالا متساوية والتى لايمكن تطبيقها مع اتحاد مقدارها متكافئة أو متقاومة اهـ

اعنى البعد الحقيقى بين ضلعى ا ب و جـ د المتقابلين الذين كل منهما يسمى قاعدة

٥ (شكل ٩٤) ارتفاع المثلث هو عمود اد النازل من ا رأس المثلث على ضلعه ب جـ المقابل لها الذى يسمى قاعدة

٦ (شكل ٩٥) ارتفاع شبه المنحرف هو عمود هـ و المحصور بين ضلعى ا ب و جـ د المتوازيين

٧ مساحة الشكل وسطحه بمعنى واحد تقريبا غير ان لفظ المساحة يطلق على سعة وجه شكل أو يستعمل فى تقدير سطح الشكل بسطح شكل آخر

اعلم ان معرفة هذه المقالة والمقالات الآتية وادراكها كما ينبغى يتوقف على معرفة أصول النسبة والتناسب فيلزم التأمل وصرف الذهن فى ادراك أصل حقيقة التناسب وينبغى ترك المبهمات والمشكلات التى تعرض فى التقرير والتلفظ من أجل ذلك كان ايضاح الملاحظات التى يحتاج اليها عند صرف الذهن من باب أولى وان لزمت مراجعة الكتب الجبرية

مثلا اذا تناسبت هذه المقادير الاربع ا : ب :: جـ : د يعلم ان حاصل ضرب طرفى ا × د يساوى حاصل ضرب وسطى ب × جـ ولا ريب فى هذا كما صرح به فى قواعد علم الحساب وكل جسم أو مقدار يتعين أو يتصور فى الذهن تعيينه باعداد ويمكن ان يفرض ذلك فى كل وقت

مثلا اذا كانت مقادير ا و ب و جـ و د خطوطا وكان احد هذه الخطوط أو خط خامس آخر واحدا لها ومقياسا مشتركا بين كافة تلك الخطوط يظهر عدد من قياسها بذلك الواحد سواء كان كل واحد من خطوط ا و ب و جـ و د صحيحا أو كسرا منطقا أو أصم فعلم ان النسبة بين هذه الخطوط تجرى مجرى النسبة التى بين الاعداد الحسابية العادية فيقال لحاصل ضرب خطى ا و د مستطيل ا د من أجل ذلك كان مستطيل ا د بمعنى المستطيل الذى يحصل من العدد المشتمل

علمه

عليه خط ا بضربه فى العدد الذى يشتمل عليه خط ى ويسهل علينا بطريق مستقيم كامل

وهو ان مستطيل ا ى يساوى مستطيل ب ح ويعلم ان ا و ب من جنس واحد مثلا اذا كانا من جنس الخط وكان مقدار ح و ى من جنس السطح فينظر الى الجميع كالاعداد الحسابية

فاذا كان مقدارا ا و ب معينين بالاحاد الخطى فيتعين مقدارا ح و ى بالاحاد السطحى وفيه يكون ما نتج منها اعدادا مثل حاصل ا × ى وحاصل ب × ح وعموما فى جميع العمليات التى تجرى بطريق النسبة والتناسب يلزم دائما ان ينظر اليها مثل أعداد كل جنس يوافق تلك النسبة وحدودها ولا عسر فى تصوره ولا فى النظر فيما يحصل منه ولا فى اجراء عمله أبدا

ولا يخفى انه تارة يبنى على القواعد السهلة من علم الجبر فى اثبات دعاوى هذه الهندسة وهذا مستند الى البديهية أعنى العلوم المتعارفة فاستحسن ذكر تلك القواعد فى هذا المحل مثلا اذا كان ا = ب + ح وضرب كل من طرفى هذه المساواة فى م فيظهر ا × م = ب × م + ح × م

وأيضا اذا كان ا = ب + ح و ى = هـ ــ ح

واجتمعت اطراف هذه المساواة فيكون ا + ى = ب + ح + هـ ــ ح فان حذفت المقدارين المتحدين عينا المختلفين علامة الواقعين فى احدى طرفى المساواة يكون ا + ى = ب + هـ وقس على هذا

ولكن الاحسن انه حين تقرأ الهندسة ينظر الى علم الجبر كلما يحتاج اليه القارئ والاولى انهما يدرسان معا لما فيهما من المنافع والتوافق الذى بينهما لان تطبيق الجبر على الهندسة هو من أنفس الفنون وأشد ما يحتاج اليه عند التحصيل الطالبون ومترجم هذا الكتاب من الفرنساوى الى التركى حضرة الحبر الاعظم واستاذنا الاكرم ميرالوا أدهم بك لما صدرت مطالعته العلية كتاب الجبر الذى هو تأليف المهندس رنو وهو من كتب الجبر التى تدرس

بارض فرانسة وأعظم ديارها وهو مشتمل على جلدين أحدهما يسمى الجلد الاول والآخر يسمى الجلد الثانى فوجده كثيرا المنافع فامر بترجمته من الفرنساوى الى العربى وان شاء الله تعالى تتيسر ترجمته من العربى الى التركى ليعم نفعه جميع اهالى ملتنا الاحمدية على صاحبها أفضل الصلاة والتحية وما توفيقى الا بالله وبه نثق

(الدعوى الاولى النظرية)

الاشكال المتوازية الاضلاع المتساوية القاعدة والارتفاع تكون متكافئة مثلا (شكل ٩٦) فى المتوازيى الاضلاع ا ب ح د و ا ب هـ و خط ا ب قاعدة مشتركة ولتساوى ارتفاعهما بالفرض توجد قواعدهما العليا التى هى د ح و هـ و على خط مستقيم واحد موازلخط ا ب ولتساوى الاضلاع المتقابلة فى الشكل المتوازى الاضلاع يكون ا د = ب ح و ا و = ب هـ وكذلك من كون ح د = ا ب و و هـ = ا ب فيكون د ح = و هـ فان أضيف جزء ح و على كل من خطى د ح و هـ و المتساويين يصير ح هـ و د و متساويين فعلى هذا تكون اضلاع مثلثى د ا و و ح ب هـ الثلاثة متساوية ويكون المثلثان المذكوران متساويين (شكل ٩٦) فعلم انه اذا طرح من ا ب د هـ الشكل ذى أربعة اضلاع مثلث ا د و يبقى المتوازى الاضلاع ا ب هـ و ومنه اذا طرح أيضا مثلث ح ب هـ يبقى المتوازى الاضلاع ا ب ح د ولتساوى البواقى من الاشياء المتساوية اذا طرحت منها أشياء متساوية ظهر ان شكلى ا ب ح د و ا ب هـ و المتوازيى الاضلاع المتحدى القاعدة والارتفاع يكونان متكافئين

(نتيجة) (شكل ٩٧) متى اتحدت قاعدة متوازى الاضلاع ا ب ح د ومستطيل ا ب هـ و وارتفاعهما يكونان متكافئين

(الدعوى الثانية النظرية)

اذا كانت القاعدة والارتفاع متساوية فى مثلث ا ب ح ومتوازى

الاضلاع ا ـ ح ى (شكل ٩٨) فيكون المثلث نصف متوازى الاضلاع لان مثلث ا ـ ح مساو لمثلث ا ح ى

(نتيجة ١) مثلث ا ـ ح الواقع على قاعدة ـ ح هو نصف مستطيل ـ ح هو لانه يقاوم متوازى الاضلاع ا ـ ح ى

(نتيجة ٢) جميع المثلثات المتساوية القواعد والارتفاعات تكون متكافئة

(الدعوى الثالثة النظرية)

المستطيلان المتحدا الارتفاع النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما مثلا (شكل ٩٩) مستطيلا ا ـ ح ى و ا هـ و ى المشترك فيهما ارتفاع اى تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا ـ و ا هـ فلابد ان يفرض بين قاعدتى ا ـ و ا هـ مقياس مشترك مثلا بان تكونا كاعداد ٧ و ٤ فاقول اذا قسمت قاعدة ا ـ الى سبعة أقسام متساوية فقاعدة ا هـ تحوى من تلك الاقسام أربعة فاذا أقيم على القاعدة من كل من نقط التقسيم عمود فيحدث سبعة مستطيلات صغار متساوية لان تلك المستطيلات متساوية القواعد والارتفاعات فمستطيل ا ـ ح ى يحتوى على سبعة مستطيلات ومستطيل ا هـ و ى يحتوى على أربعة مستطيلات فقط فعلى هذا تكون نسبة مستطيل ا ـ ح ى الى مستطيل ا هـ و ى كنسبة عدد ٧ الى عدد ٤ أو كنسبة قاعدة ا ـ الى قاعدة ا هـ وتجرى هذه الطريقة كما ذكر فيما عدا هذا من سائر النسب التى يفرض فيها مقياس مشترك فلذا كانت ا ـ ح ى : ا هـ و ى :: ا ـ : ا هـ

(شكل ١٠٠) وفى الصورة الثانية اذا لم يفرض بين قاعدتى ا ـ و ا هـ مقياس مشترك فلا تزال أيضا ا ـ ح ى : ا هـ و ى :: ا ـ : ا هـ فانه ان لم يكن هذا التناسب صحيحا فتبقى الثلاثة حدود الاول على حالها ويكون رابع متناسب لها أكبر أو أصغر من ا هـ مثلا اذا كان المتناسب الرابع أكبر من ا هـ يعنى ان كانت ا ـ ح ى : ا هـ و ى :: ا ـ : ا غ

فاذا قسم خط ا ب الى أقسام متساوية كل قسم يكون أصغر من هـ ح
حتى تقع نقطة ط احدى نقط التقسيم بين نقطة هـ وبين نقطة ح
فاذا أقيم منها عمود ط ر على خط ا ط ولوجود المقياس المشترك بين
قاعدتى ا ب و ا ط تكون نسبة ا ب ج د : ا ط و ى ::
ا ب : ا ط كما صرح به فى الشق الاول من هذه الدعوى وقد فرض ان
ا ب ج د : ا هـ و ى :: ا ب : ا ح ومن تساوى المقدمات
يحصل من التوالى تناسب وبه تصير ا ط ر ى : ا هـ و ى :: ا ط : ا ح
فعلى هذا حيث ان مقدار ا ح اكبر من مقدار ا ط لابد أن يكون
مستطيل ا هـ و ى أكبر من مستطيل ا ط ر ى وهذا يوجب ان الجزء أكبر
من الكل وهو محال ومن ثمة لايمكن صحة ذلك التناسب ولا تكون نسبة
مستطيل ا ب ج د الى مستطيل ا هـ و ى كنسبة قاعدة ا ب الى مقدار
أكبر أو أصغر من ا هـ سواء كان بين تلك القاعدتين مقياس مشترك أولا
وبه ثبت المطلوب من ان تكون نسبة مستطيل ا ب ج د الى مستطيل
ا هـ و ى كنسبة قاعدة ا ب الى قاعدة ا هـ

(الدعوى الرابعة النظرية)

(شكل ١٠١) ا ب ج د و ا هـ ر و أى مستطيلين النسبة بينهما
كنسبة حاصل ضرب القواعد بالارتفاعات فيهما يعنى تكون نسبة
ا ب ج د : ا هـ ر و :: ا ب × ا ى : ا هـ × ا و وفى هذين
المستطيلين يفرض ان الزاويتين المتقابلتين رأساهما مجتمعتان فى نقطة
ا فاذا امتد ضلعا ر هـ و ج د على الاستقامة حتى يلتقيا فى نقطة
ح ولاتحاد ارتفاعهما وهو ا ى فى مستطيلى ا ب ج د و ا هـ ح ى
تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتى ا ب و ا هـ وأيضا لاشتراك
ارتفاع ا هـ بين مستطيلى ا هـ ح ى و ا هـ ر و تكون النسبة
بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا ى و ا و ومن ثمة ظهر هذان
التناسبان

وهما { ا ب ح ى : ا ه ح ى :: ا ب : ا ه
{ ا ه ح ى : ا ه د و :: ا ى : ا و

فاذا ضربت حدود هذين التناسبين على سواء وحذف الحد المشترك أعنى ا ه ح ى المضروب فيه المقدم والتالى تكون نسبة ا ب ح ى : ا ه د و :: ا ب × ا ى : ا ه × ا و وثبت المطلوب

تنبيه لاجل مساحة المستطيل يمكن أن يؤخذ حاصل ضرب قاعدته بارتفاعه والمراد منه هو حاصل ضرب العددين أعنى ما كان أحدهما العدد المعين بالاحد الخطى الذى اشتملت عليه القاعدة والآخر العدد المعين بالاحد الخطى الذى يحتوى به الارتفاع وصارت هذه القاعدة هى الطريقة المستعملة فى علم الهندسة

مثلا اذا كانت قاعدة مستطيل آ ٣ احاد وارتفاعه ١٠ احاد فيشار الى ذلك المستطيل هكذا ٣ × ١٠ او ٣٠ ولكن العدد المفرد لا يحصل منه معنى مفيد

وأما اذا كان ب مستطيلا وكانت قاعدته ١٢ وارتفاعه ٧ اعداد فيشار الى هذا المستطيل هكذا ٧ × ١٢ او ٨٤ وبه ظهران النسبة بين مستطيلى ا و ب كالنسبة بين عددى ٣٠ و ٨٤

وان جعل مستطيل ا أحدا سطحيا فيصير مستطيل ب = $\frac{٨٤}{٣٠}$ أعنى مساحته المطلقة نظرا الى المستطيل الذى اتخذ أحدا سطحيا يعنى $\frac{٨٤}{٣٠}$ يساوى الاحد السطحى المفروض

لكن اتخاذ المربع أحدا سطحيا فى مساحة السطوح اولى وأهون وهو المعتاد ولذا انتخب المربع الذى ضلعه هو الاحد الخطى وما استخرج به من المساحة يكون حقيقيا مثلا فى مستطيل آ الذى مساحته ٣٠ عددا هى عبارة عن ثلاثين أحدا سطحيا أو ثلاثين مربعا ضلعه مساو للاحد الخطى كما يرى من هنا (شكل ١٠٢) ويقال لحاصل ضرب خطين أو عددين مستطيل الخطين او العددين وهذا أكثر ما استعمل فى الهندسة ويقال لحاصل ضرب عددين

ارتفاعه هو بنصف مجموع قاعدتيه اب و حد المتوازيين فنرسم خط طب من نقطة ر وسط خط بح موازيا للضلع اد المقابل له فاذا امتد خط دح حتى يلاقي خط طب ففي مثلثي ربط و رحب الحادثين ضلعا رب و رح متساويان بالعمل وزاويتا طرب و حرب المتقابلتان متساويتان ولتوازي خطي حب و طب تتساوى زاويتا ربط و رحب المتبادلتان ويكون ذانك المثلثان متساويين (مقالة ١) ومن ثمة كان شبه المنحرف ابحد مكافئا لمتوازي الاضلاع ادبط ومساحة كل منهما تساوي هو × اط ولكن اط = دب ومن تساوي مثلثي رحب و رطب ساوى ضلع بط ضلع حب فلذا صار اب + حد = اط + دب = ٢ اط فاذا كان خط اط نصف مجموع قاعدتي اب و دح وظهر ان مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب ارتفاعه هو بنصف مجموع قاعدتيه اب و حد المتوازيتين ويشار اليها هكذا ابحد = هو × $\frac{(\text{اب}+\text{حد})}{٢}$

تنبيه اذا رسم خط رع من نقطة ر وسط خط بح موازيا للقاعدة اب توجد أيضا نقطة ع في وسط ضلع اد لانه من كون اضلاع شكل اع رط و دع رب المتقابلة متوازية يكونان متوازيي الاضلاع وعلى هذا يكون اع = رط و دع = رب ولكون طر = رب لتساوي مثلثي برط و حرب فحينئذ يكون اع = دع وبهذا يكون رع = اط = $\frac{(\text{اب}+\text{حد})}{٢}$ ويعلم ان مساحة شبه المنحرف هوعر تساوي حاصل ضرب الارتفاع بالخط الموصول بين الضلعين الغير المتوازيين ويسمى الخط المتوسط

(الدعوى الثامنة النظرية)

اذا قسم الخط المستقيم الى قسمين فمربع هذا الخط يساوي مجموع مربعي قسميه

وضعف مستطيليهما

مثلا (شكل ١٠٦) اذا قسم خط اح الى قسمين اب و بح فالمربع المنشأ على خط اح الكامل يحتوى على مربعى قسمى اب و بح ومستطيلين من نوع مستطيل حاصل من القسمين المذكورين يعنى $\overline{\text{اح}}^{2}$ او

$$(\text{اب}+\text{بح})^{2}=\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{بح}}^{2}+2\,\text{اب}\times\text{بح}$$

فاذا رسم مربع احده واخذ وا مساويا لقسم اب ورسم خط ود موازيا لخط اح و بع موازيا لخط اه فمربع احده ينقسم الى اربعة اقسام القسم الاول ابطو هو المربع المرسوم على قسم اب لان او مساو اب بالعمل والقسم الثانى طدىع هو المربع المرسوم على قسم بح لان اح = اه و اب = او فيكون تفاضل اح ـ اب = تفاضل اه ـ او فلذا صار بح = هو ولكن من خاصية التوازى ان يكون طد = بح و ىد = هو فصار قسم حىدط هو المربع المرسوم على قسم بح فاذا طرح مربعا هذين القسمين من المربع الكامل يبقى مستطيلا بحدط و هوطح كل واحد منهما مساو لمستطيل اب و بح ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون مربع خط اح الكامل مساويا لمجموع مربعى اب و بح وضعف مستطيلهما

تنبيه أيضا بهذه الطريقة ثبت فى علم الجبر فى بيان تربيع الكمية ذات الحدين ان

$$(\text{ا}+\text{ب})^{2}=\overline{\text{ا}}^{2}+\overline{\text{ب}}^{2}+2\,\text{ا}\times\text{ب}$$

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ١٠٧) اذا كان خط اح تفاضل خطى اب و بح فالمربع المرسوم على خط اح يساوى مجموع مربعى اب و بح اذا طرح منه ضعف مستطيل اب و بح يعنى يكون $\overline{\text{اح}}^{2}$ او $(\text{اب}-\text{بح})^{2}$

$$= \overline{ا ب}^{2} + \overline{ب ح}^{2} - 2\, ا ب \times ب ح$$

فنرسم مربع ا ب ط و وأخذ اه مساويا لخط اح ورسم حر موازيا لخط ب ط و حك موازيا لخط اب ويكمل مربع هورك فالمستطيلان الحادثان ح ط و و ر ك ى كل واحد منهما يكون عين مستطيل اب × ب ح فظهر انه اذا طرح المستطيلان المرقومان من مجموع شكل اب ط ر ك ه ا المقاوم لمربعى $\overline{ا ب}^{2} + \overline{ب ح}^{2}$ يبقى مربع ا ح ر ه فلذا علم ان المربع المرسوم على خط اح يساوى الباقى حين يطرح ضعف مستطيل اب × ب ح من مجموع مربعى اب و ب ح ويثبت المطلوب

تنبيه وكذلك رقت هذه الدعوى فى علم الجبر هكذا $\overline{(ا - ب)}^{2} = \overline{ا}^{2} + \overline{ب}^{2} - 2\, ا ب$

(الدعوى العاشرة النظرية)

المستطيل المنشا من مجموع الخطين المختلفين والتفاضل الذى بينهما يساوى التفاضل بين مربعيهما

والمعنى (شكل ١٠٨) ان يكون (اب + ب ح) × (اب − ب ح) $= \overline{ا ب}^{2} - \overline{ب ح}^{2}$

فنبنى مربعا اب ط و ، اح ر ه على اب و اح وامتد ضلع اب جهة ب واخذ ب ك = ح ب وكمل مستطيل اك ى ه فقاعدة هذا المستطيل وهى اك تكون مساوية لمجموع خطى اب و ب ح وارتفاعه اه وهو التفاضل بينهما فلذا صار مستطيل اك ى ه = (اب + ب ح) × (اب − ب ح) ولقد علم ان هذا المستطيل مركب من قسمى اب ح ه + ب ح ى ك

وان قسم ـبحـ ى مساو لمستطيل هدرو لكون ـبح = دهـ و ـبى = هو كما لايخفى فاذا صار اكـهـ = احـهـ + هدرو وهما التفاضل بين مربع اطو ومربع حـ الذى هو مربع دخ ظر ومن ثم ثبت المطلوب من ان يكون (ا ـب + ـب حـ) × (ا ـب ـ ـب حـ) = ا ـب ٢ ـ ـب حـ ٢

تنبيه وكذلك رقت هذه الدعوى فى علم الجبر هكذا (ا + ـب) × (ا ـ ـب) = ا ٢ ـ ـب ٢

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

فى كل مثلث قائم الزاوية المربع المنشا على الوتر يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين

(شكل ١٠٩) فنى رسم مربع على كل من ثلاثة اضلاع مثلث ا ـب حـ الذى زاويته آ قائمة ونزل عمود اى من زاوية آ القائمة على وترها وامتد على استقامته الى نقطة هـ ووصل وترا او و خ حـ فالمثلثان الحادثان اعنى ا ـبو و ح ـب حـ يكونان متساويين لتساوى مثنى الاضلاع منهما والزوايا التى بينهما لان ا ـب و ـب خ متساويان لكونهما ضلعى مربع واحد وكذا ـب حـ = ـبو وايضا زاوية ا ـبو و حـ ـب ح متساويتان لان كل واحدة منهما مركبة من زاوية ا ـب حـ وزاوية حـ ـبو القائمة او ا ـب ح القائمة الاخرى (مقالة ١) فمثلث ا ـبو هو نصف متوازى الاضلاع ـب دهو لاتحاد قاعدة ـبو وارتفاعه ـبى وكذلك مثلث خ ـب حـ نصف مربع اح لانه يلزم من كون زاويتى ـب اح و ـب اط قائمتين ان يكون خطا اح و اط خطا مستقيما واحدا يوازى ضلع ـب خ وبهذا يكون مثلث ح ـب حـ نصف مربع اح لاتحادهما فى قاعدة ـب ح وارتفاع ا ـب ولتساوى مثلث ا ـبو لمثلث ح ـب حـ كما

صرح به يكون مستطيل ب د ه و الذى هو ضعف مثلث ا ب و مكافئا لمربع ا ج الذى هو ضعف مثلث ج ب ه . وبمثل هذا يثبت كون مستطيل ح د ه ر مكافئا لمربع ا ب وحيث حصل مربع ب ح ر و من مجموع مستطيلى ب د ه و و ح د ه ر يكون مربع ب ح ر و المنشا على وتر القائمة مساويا لمجموع مربعى ا ب ح ط و ا ح ب ك المنشاين على الضلعين الآخرين ويثبت المطلوب

وتلك الدعوى تعين بهذا الوجه بالعلامة $\overline{ب ح}^{2} = \overline{ا ب}^{2} + \overline{ا ح}^{2}$

(نتيجة ١) مربع كل ضلع من الضلعين المحيطين بالقائمة يكون مساويا بالتفاضل مربع وتر القائمة ومربع الضلع الآخر نحو $\overline{ا ب}^{2} = \overline{ب ح}^{2} - \overline{ا ح}^{2}$

(نتيجة ٢) (شكل ١١٨) متى كان ا ب ح د مربعا و ا ح قطره يكون مثلث ا ب ح متساوى الساقين قائم الزاوية فلهذا يكون $\overline{ا ح}^{2} = \overline{ا ب}^{2} + \overline{ب ح}^{2} = ٢ \ \overline{ا ب}^{2}$ فعلى هذا يكون المربع المرسوم على قطر ا ح ضعف المربع المرسوم على ضلع ا ب فلاجل ادراك خواص هذه الدعوى اذا رسم من نقطتى ا و ح خطان مستقيمان موازيان لقطر ب د ومن نقطتى ب و د خطان موازيان لقطر ا ح فمربع ه و ر ع الحادث هو مربع ا ح وهو يحتوى على ثمانية امثال مثلث ا ب ه واما مربع ا ب ح د فيحتوى على اربعة مثلثات من مثله فقط فلهذا ظهر ان مربع ه و ر ع المنشا على القطر هو ضعف مربع ا ب ح د المنشا على الضلع ومن ثمة كانت $\overline{ا ح}^{2} : \overline{ا ب}^{2} :: ٢ : ١$ فاذا اخذ جذر المقادير أيضا يصير $ا ح : ا ب :: \sqrt{٢} : \sqrt{١}$ وقد علم ان لاجذر صحيحا للعدد ٢ فتبين انه لا مقياس مشترك بين ضلع المربع وقطره وهذه الخصوصية ستذكر تفصيلا موضحا فيما سيأتى من العمليات الاخر

(نتيجة ٣) (شكل ١٠٩) لقد ثبت فى شكل العروس ان مربع ا ح مساو

لمستطيل بدهو ولاتحاد ارتفاع بو في مربع بحرو ومستطيل بدهو تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي بح و بد

وبه صارت $\overline{\text{بح}}^2 : \overline{\text{اب}}^2 :: \text{بح} : \text{بد}$ فعلى هذا تكون نسبة مربع وتر القائمة الى مربع احد الضلعين المحيطين بها كنسبة وتر القائمة الى السهم المجاور لذلك الضلع وفي هذا المحل ما يسمى سهم هو قسم وتر القائمة المحدود بالعمود النازل من راس القائمة على وترها فلذا يكون قسم بد هو السهم المجاور للضلع اب واما قسم دح فهو السهم المجاور للضلع اح

ومن ثمة صارت $\overline{\text{بح}}^2 : \overline{\text{اح}}^2 :: \text{بح} : \text{حد}$

(نتيجة ٤) من اتحاد الارتفاع في مستطيلي بدهو و دحزه كانت النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما بد و حد واتكافؤ هذين المستطيلين بمربعي $\overline{\text{اب}}^2$ و $\overline{\text{اح}}^2$ تكون $\overline{\text{اب}}^2 : \overline{\text{اح}}^2 :: \text{بد} : \text{دح}$

ومن هذا صارت النسبة بين مربعي الضلعين المحيطين بالقائمة كالنسبة بين السهمين المجاورين لذلك الضلعين

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

في كل مثلث تفاضل مربع وتر الحادة ومجموع مربعي الضلعين الباقيين هو قدر ضعف مستطيل ضرب القاعدة فيما بين موقع العمود وتلك الزاوية الحادة

مثلا (شكل ١١٠) اذا كانت زاوية ح في مثلث ابح حادة يكون مربع اب الموتر لها اصغر من مجموع مربعي اح و بح المحيطين بها فاذا انزل عمود اد على قاعدة بح فالتفاضل مساو ضعف مستطيل دح × بح فلذا اذا طرح ضعف مستطيل دح × بح من مجموع مربعي بح و حا فالباقي يساوي مربع اب

فيكون $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{اح}}^2 - 2\,\text{دح} \times \text{بح}$ برهان هذه

الدعوى

الدعوى على ضربين

الاول وهو ان يكون العمود داخل مثلث ابح فيكون $\text{بد} = \text{بح} - \text{حد}$ ومن ثمة صار $\text{بد}^{٢} = \text{بح}^{٢} + \text{حد}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$ كما في (٩) فاذا زيد على هذين المتساويين مربع اد يكون $\text{اد}^{٢} + \text{بد}^{٢} = \text{بح}^{٢} + \text{حد}^{٢} + \text{اد}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$ لكن من كون مثلثي ابد و احد قائمي الزاوية يلزم ان يكون $\text{اب}^{٢} = \text{اد}^{٢} + \text{بد}^{٢}$ ويكون أيضا $\text{اد}^{٢} + \text{دح}^{٢} = \text{اح}^{٢}$ فاذا استبدلت هذه الاشياء المتساوية بما يساويها يكون $\text{اب}^{٢} = \text{اح}^{٢} + \text{بح}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$

الصورة الثانية وهو ان يكون العمود واقعا خارج مثلث ابح فمن كون $\text{بد} = \text{حد} - \text{بح}$ يكون $\text{بد}^{٢} = \text{حد}^{٢} + \text{بح}^{٢} - ٢\ \text{حد} \times \text{بح}$ فاذا زيد على كل مربع اد واخذ البدل كما صرح به في الشق الاول يكون $\text{اب}^{٢} = \text{بح}^{٢} + \text{اح}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$ ويثبت المطلوب

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية)

في كل مثلث منفرج الزاوية تفضل مربع وتر المنفرجة على مجموع مربعي الضلعين الباقيين هو قدر ضعف مستطيل ضرب القاعدة فيما بين موقع العمود وبين تلك المنفرجة

(شكل ١١١) اذا كانت زاوية ح في مثلث ابح منفرجة فمربع ضلع اب الموتر لها اكبر من مجموع مربعي ضلعي اح و بح المحيطين بها فاذا انزل اد على بح فالتفاضل هو قدر ضعف مستطيل

بـح × حء فعلى هذا اذا زيد ضعف مستطيل بـح × حء على مجموع مربعي اح و بح يلزم ان يكون المجموع مساويا لمربع اب

يعني $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اح}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 + ٢\ \text{بح} \times \text{حء}$

فى هذه الدعوى لا يمكن وقوع العمود فى داخل المثلث فانه لو فرض وقوعه فى الداخل على نقطة هـ يلزم ان تكون زاوية هـ فى مثلث احهـ قائمة ومن كون زاوية ح منفرجة حصل الخلف

فلو وقوع العمود خارج المثلث يكون بء = بح + حء وعلى ما ذكر فى الدعوى الثامنة يكون $\overline{\text{بء}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{حء}}^2 + ٢\ \text{بح} \times \text{حء}$

فان زيد على كل من هذين المتساويين مربع اء يكون

$\overline{\text{بء}}^2 + \overline{\text{اء}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{حء}}^2 + \overline{\text{اء}}^2 + ٢\ \text{بح} \times \text{حء}$

وان اخذ $\overline{\text{اب}}^2$ بدلا عن مربعي $\overline{\text{بء}}^2 + \overline{\text{اء}}^2$ و $\overline{\text{اح}}^2$ عن $\overline{\text{اء}}^2 + \overline{\text{حء}}^2$ كما فى الدعوى السابقة حينئذ يكون $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{اح}}^2 + ٢\ \text{بح} \times \text{حء}$ ويثبت المطلوب

(تنبيه) تساوي مجموع مربعي الضلعين لمربع الضلع الثالث مختص بالمثلث القائم الزاوية فقط لانه اذا كانت الزاوية التي بين الضلعين حادة يكون مجموع مربعيهما اكبر من مربع الضلع المقابل لها وان كانت منفرجة يكون مجموع مربعيهما أصغر

(الدعوى الرابعة عشرة النظرية)

مجموع ضعف مربع الخط النازل من رأس المثلث الى وسط قاعدته وضعف مربع نصف القاعدة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين

مثلا (شكل ١١٢) اذا انزل خط اهـ من ا رأس مثلث ابح الى وسط قاعدته بح يكون $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اح}}^2 = ٢\ \overline{\text{اهـ}}^2 + ٢\ \overline{\text{بهـ}}^2$

لانه متى انزل عمود اد من نقطة ا على قاعدة بح فمن كون زاوية ه من مثلث اهح حادة يكون $\text{اح}^{2} = \text{اه}^{2} + \text{هح}^{2} - ٢\ \text{هح} \times \text{هد}$ كما صرح به فى الدعوى (١٢) الثانية عشرة وكذلك من كون زاوية ه من مثلث ابه منفرجة يكون $\text{اب}^{2} = \text{اه}^{2} + \text{هب}^{2} + ٢\ \text{هب} \times \text{هد}$ كما صرح به فى الدعوى (١٣) الثالثة عشرة المتقدمة فاذا جمعت هذه المتساويات ولوحظ أن هب و حه متساويان لانهما نصفا القاعدة واخذ هب بدلا عن هح يكون $\text{اب}^{2} + \text{اح}^{2} = ٢\ \text{اه}^{2} + ٢\ \text{هب}^{2} + ٢\ \text{هب} \times \text{هد} - ٢\ \text{هب} \times \text{هد}$ لكن من كون مقدار $٢\ \text{هب} \times \text{هد}$ فى الجملة زائدا وناقصا فيحذف وحينئذ يثبت المطلوب من ان يكون $\text{اب}^{2} + \text{اح}^{2} = ٢\ \text{اه}^{2} + ٢\ \text{هب}^{2}$

نتيجة فى كل شكل متوازى الاضلاع مجموع مربعى قطريه مساو لمجموع مربعات أضلاعه

لانه (شكل ١١٣) من كون قطرى اح و بد فى شكل متوازى الاضلاع ابحد متناصفين فى نقطة ه (مقالة ١) يكون فى مثلث ابح $\text{اب}^{2} + \text{بح}^{2} = ٢\ \text{اه}^{2} + ٢\ \text{هب}^{2}$ وكذلك فى مثلث ادح $\text{اد}^{2} + \text{دح}^{2} = ٢\ \text{اه}^{2} + ٢\ \text{ده}^{2}$ فاذا جمعت هذه الاشياء المتساوية وأخذ ده بدلا عن به المساوى له يكون $\text{اب}^{2} + \text{بح}^{2} + \text{اد}^{2} + \text{دح}^{2} = ٤\ \text{اه}^{2} + ٤\ \text{ده}^{2}$ ولكن حيث ان $٤\ \text{اه}^{2}$ هو قدر مربع ٢ اه او مربع قطر اح وأيضا من كون مقدار $٤\ \text{ده}^{2}$ هو مربع

٢ : ده او مربع قطر ب د ظهر ان مجموع مربعي القطرين يساوي مجموع مربعات اضلاعه ويثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة عشرة النظرية)

(شكل ١١٤) اذا رسم خط ده موازيا لقاعدة مثلث ا ب ح فهذا الخط المرسوم يقسم ضلعي ا ب و ا ح على التناسب يعني تكون اد : د ب :: اه : ه ح لانه متى وصل خطا ب ه و د ح فالمثلثان الحادثان اعني ب ده و ده ح توجد فيهما قاعدة ده مشتركة ولوقوع زاويتي الرأس اعني ب و ح على الخط الموازي لتلك القاعدة يكون ارتفاعهما متساويين ولذا يتكافئان وحيث كانت نقطة ه رأس مثلثي اده و ب ده ولاتحاد الارتفاع فيهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما اد و ب د

فعلى هذا صارت اده : ب ده :: اد : ب د وايضا لاشتراك رأس مثلثي اده و ده ح في نقطة د ولاتحاد ارتفاعهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي اه و ه ح فتكون اده : ده ح :: اه : ه ح ولكن لتساوي مثلثي ب ده و ده ح ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين يثبت المطلوب من ان تكون نسبة اد : ب د :: اه : ه ح

(نتيجة ١) اذا تناسبت المقادير الاربع فلا تزال متناسبة بطريق التركيب فلذا صارت اد + د ب : اد :: اه + ه ح : اه او اب : اد :: اح : اه وكذلك اب : ب د :: اح : ح ه

(نتيجة ٢) (شكل ١١٥) اذا رسمت بين خطي اب و ح د المستقيمين ما يراد من خطوط متوازية اح و ه ف و ل ع و ب د الخ فهذه الخطوط المتوازية تقطع الخطين المرفوضين على التناسب وتكون اه : ح ف :: ه ل : ف ع :: ل ب : ع د

لانه اذا اخرج خطا اب و حد على الاستقامة يلتقيان فى نقطة ط ويكون فى مثلث ط هو الحادث خط اح موازيا لقاعدته هو ولذا صارت نسبة طه : اه :: طو : حو او طه : طو :: اه : حو وكذلك فى مثلث طدح تكون نسبة طه : هر :: طو : وح او طه : طو :: هر : وح فمن كون نسبة طه : طو مشتركة فى التناسبين يحصل منهما هذا التناسب اعنى نسبة اه : حو :: هر : وح وبمثل هذا يثبت ان نسبة هو : وح :: دب : حد وهلم جرا الى آخره

ولذا ظهر ان خطوط هو و دغ الخ المتوازية تقطع خطى اب و حد المستقيمين على التناسب

(الدعوى السادسة عشر النظرية)

(شكل ١١٦) وبالعكس اذا قطع خط ده المستقيم خطى اب و اح على التناسب وكانت نسبة اد : دب :: اه : هح فخط ده يكون موازيا للقاعدة بح

لانه ان لم يكن خط ده موازيا للقاعدة بح وفرض ان خط دط موازيا لها فعلى ما صرح به فى الدعوى التى تقدمت تكون نسبة اد : دب :: اط : طح ولكن قد فرض ان نسبة اد : دب :: اه : هح فمن كون نسبة اد : دب مشتركة فى هذين التناسبين يحصل منهما هذا التناسب وهو ان تكون نسبة اط : طح :: اه : هح وهذا غير ممكن لان فى هذا التناسب يلزم ان يكون تالى هح اكبر من تالى طح كما ان مقدم اه اكبر من مقدم اط وحينئذ يلزم ان يكون الشئ الاعظم اصغر مما دونه وهذا خلاف ومن ثمة لا يرسم خط من نقطة د موازيا للقاعدة بح الا خط ده وبه ثبت المطلوب من ان يكون خط ده هو الموازى لتلك القاعدة

(تنبيه) اذا كانت نسبة اب : اى :: اح : اهـ كذلك يكون خط ده موازيا القاعدة بح لان هذا التناسب لايزال متناسبا بطريقة الفضل يعنى تكون نسبة اب — اى : اى : : اح — اهـ : اهـ اونسبة بد : اى :: حهـ : اهـ فعلى ماثبت آنفا ظهران يكون خط ده ايضا موازيا القاعدة بح

(الدعوى السابعة عشر النظرية)

(شكل ١١٧) اى مثلث اذا نصفت زاويته باح بخط اى فهذا الخط يقسم قاعدة بح الى قسمين بد و دح تكون النسبة بينهما كالنسبة بين ضلعى اب و اح المحيطين بها يعنى تكون نسبة دب : دح :: اب : اح

لانه اذا رسم هح من نقطة ح موازيا الخط اى وامتد ضلع با حتى يقطع هذا الموازى فى نقطة هـ نخط اى فى مثلث بحهـ الحادث يكون موازيا القاعدته حهـ ومن ثمة حصل هذا التناسب يعنى نسبة بد : دح :: با : اهـ ولكن من توازى خطى اى و حهـ وقطعهما بخط اح تكون زاوية داح مساوية لزاوية احهـ انظر (مقالة ١) وكذلك من كون زاويتى اهح و باى خارجة وداخلة ايضا يكونان متساويين وبما فرض ان زاويتى داح و باى متساويتان تكون زاوية احهـ ايضا مساوية لزاوية اهح واذا يكون اهـ = اح انظر (مقالة ١) فان وضع فى التناسب الذى ذكر خط اح بدلا عن مساويه اهـ يثبت المطلوب من ان تكون نسبة بد : دح :: با : اح

(الدعوى الثامنة عشر النظرية)

المثلثان المتساويا الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة ويكونان متشابهين

(شكل ١١٩) مثلا اذا كانت الزوايا المتناظرة فى مثلثى ابح و

جدھ يعنی زاوية ںاج = جدھ و اںج = دجھ و اجں = دھج تكون الاضلاع المتناظرة وهی المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة يعنی تكون نسبة ںج : جھ :: اں : جد :: اج : دھ

فاذا وضع ںج و جھ ضلعاهما المتناظران على استقامة واحدة وامتد ضلعاها ںا و ھد حتى يلتقيا فی نقطة و فمن كون خط ںجھ مستقيما واحدا وزاوية ںجا مساوية لزاوية جھد الداخلة والخارجة فيكون خط اج موازيا لخط دھ أو وھ انظر (مقالة ١) وكذلك من كون زاوية اںج مساوية لزاوية دجھ يكون خط اں أو ںو موازيا لخط دج ولذا صار شكل اجدو متوازی الاضلاع

فمن كون خط اج فی مثلث ںھو موازيا للقاعدة وھ تكون نسبة ںج : ھج :: ںا : او فاذا وضع فی هذا التناسب خط جد بدلا عن مساويه او تكون نسبة ںج : جھ :: ںا : جد وايضا اذا فرض ںو قاعدة فی مثلث ںھو يكون خط جد موازيا لها ومن ثمة حدث هذا التناسب ںج : جھ :: ود : دھ فان وضع اج بدلا عن مساويه ود تكون نسبة ںج : جھ :: اج : دھ فلاشتراك نسبة ںج : جھ فی هذا التناسب والتناسب الذی سلف صارت نسبة اج : دھ :: ںا : جد لانه اذا كان كل من النسبتين مساويا لنسبة واحدة فتكونان متساويتين وصارت اضلاع مثلثی ںاج و جدھ المتناظرة متناسبة فعلى ما ذكر فی الحد الثانی وهو انه اذا كانت اضلاع الشكلين المتناظرة متناسبة وزواياهما المتناظرة متساوية يكونان متشابهين من اجل ذلك يثبت المطلوب من ان يكون مثلثا ںجا و جدھ المتساويا الزوايا متشابهين

نتيجة فی تشابه المثلثين يكفيك تساوی مثنى الزوايا المتناظرة لانه متى تساوى

مثنى الزوايا فى المثلثين تكون الزاوية الثالثة من ذينك المثلثين متساويتين ويصير المثلثان متساويى الزوايا

(تنبيه) اعلم ان الاضلاع الموترة وهى المقابلة للزوايا المتساوية فى المثلثات المتشابهة تسمى اضلاعا متناظرة فتى كانت زاوية اب ح مساوية لزاوية د ه ح يكون ضلع اب يناظر ضلع د ح وكذلك يكون ضلعا اح و د ه متناظرين لانهما موتران لزاويتى اب ح و د ح ه المتساويتين ومتى علم تناظر الاضلاع يحدث هذا التناسب اعنى كون نسبة اب : د ح :: اح : د ه :: ب ح : ح ه

(الدعوى التاسعة عشر النظرية)

متى تناسبت الاضلاع المتناظرة فى مثلثين يصيران متساويى الزوايا ومتشابهين (شكل ١٢٠) مثلا اذا كان فى مثلثى اب ح و د ه و نسبة ب ح : ه و :: اب : د ه :: اح : د و تتساوى فيهما الزوايا المتناظرة يعنى زاوية ا = د و ب = ه و ح = و فاذا انشئت زاوية و ه ر من نقطة ه مساوية لزاوية ب وزاوية ه و ر من نقطة و مساوية لزاوية ح فزاوية ر فى مثلث ه و ر تكون مساوية لزاوية ا ويصير مثلثا اب ح و ه و ر متساويى الزوايا كما مر فى الدعوى التى تقدمت وتكون نسبة ب ح : ه و :: اب : ه ر ولكن فرض ان تكون ب ح : ه و :: اب : د ه فمن تساوى الحدود الثلاثة فى هذين التناسبين يلزم ان يكون الحد الرابع ه ر = ه د وايضا كما مر فى الدعوى المذكورة تكون نسبة ب ح : ه و :: اح : و ر وكذلك فرض ان نسبة ب ح : ه و :: اح : د و ولتساوى الحدود الثلاثة ايضا يكون و ر = و د فعلى هذا صارت اضلاع مثلثى د ه و و ه ر و الثلاثة المتناظرة متساوية ولكن من كون مثلث ه ر و انشئت زواياه مساوية لزوايا مثلث اب ح يكون

مثلثا

مثلثا د هـ و و ا ب ح متساويى الزوايا ويثبت المطلوب
(تنبيه ١) فعلى ماظهر من اثبات الدعوتين الاخيرتين ان من تساوى الزوايا فى المثلثات يقتضى تناسب الاضلاع ومن تناسب الاضلاع يقتضى تساوى الزوايا وكل واحد من هذين الشرطين كاف لتحقق التشابه بين المثلثات الا ان هذه الخصوصية ليست فى الاشكال ذات الاضلاع الزائدة على الثلاثة لانه لو نظر الى ذى اربعة اضلاع لكان يمكن فيه تغيير تناسب الاضلاع بدون تبديل الزوايا وتغيير الزوايا بدون تبديل الاضلاع فلذا ظهر ان من تناسب الاضلاع لم يقتض تساوى الزوايا وبالعكس يعنى من تساوى الزوايا لم يقتض تناسب الاضلاع الا فى المثلث فقط مثلا على مايرى من هذا
(الشكل ١٢١) انه اذا رسم هـ و موازيا لخط ب ح ضلع ذى اربعة اضلاع تكون زوايا شكل ا هـ و د ذى اربعة اضلاع مساوية لزوايا شكل ا ب ح د ذى اربعة اضلاع الآخر ولكن تغيير تناسب الاضلاع ممكن وكذا يمكن تقارب أو تباعد نقطتى ب و د بدون تغيير تناسب اضلاع ذى اربعة اضلاع المذكور اعنى ا ب و ب ح و ح د و د ا وهذا يقتضى عدم مساواة الزوايا
(تنبيه ٢) لوجود المناسبة والتعلق بين هاتين الدعوتين الاخيرتين فكأنهما دعوى واحدة فاذا اضمت هذه الدعوى الى دعوى المثلث القائم الزاوية المسماة بشكل العروس فتكون هاتان الدعوتان اشهر الدعاوى واعظمها حيث انها كثيرة الفوائد فى علم الهندسة وانها كافية للدعاوى العملية فى حلها واثباتها وتطبيقها بالعمليات
لانه قد علم ان كل شكل قد يقسم الى مثلثات وكل مثلث يقسم الى مثلثين قائمى الزاوية والمعنى أن هذه الخصائص تعم جميع الاشكال

(الدعوى العشرون النظرية)

يتشابه المثلثان اذا تساوى منهما آحاد الزوايا وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين الزاويتين متناسبة
(شكل ١٢٢) مثلا اذا كان فى مثلثى ا ب ح و د هـ و زاوية ا

= زاوية د ونسبة اب : ده :: اح : دو يكونان متشابهين
فاذا اخذ از مساويا للضلع ده ورسم زح من نقطة ز موازيا للقاعدة بح تكون زاوية ازح مساوية لزاوية ابح انظر (مقالة ١) ويكون مثلثا ازح و ابح متساويي الزوايا وتكون نسبة اب : از :: اح : اح
ولكن فرض ان نسبة اب : ده :: اح : دو ولكون از = ده بالعمل صارت حدود هذين التناسبين الثلاثة متساوية فلذا يكون الحدان الرابعان متساويين اعنى اح = دو ولتساوى الضلعين والزاوية التى بينهما للضلعين الاخيرين والزاوية التى بينهما فى مثلثى ازح و دهو يكونان متساويين ولكن من كون مثلث ازح مشابها للمثلث ابح يكون مثلث دهو المساوى له مشابها للمثلث ابح ويثبت المطلوب

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

فى كل مثلثين اذا كانت الاضلاع المتناظرة متوازية او متعامدة يكون المثلثان متشابهين
(شكل ١٢٣) اولا لانه متى كان ضلع اب موازيا للضلع ده وضلع بح موازيا للضلع هو فى مثلثى ابح و دهو تكون زاوية ابح مساوية لزاوية دهو انظر (مقالة ١) ومتى كان ضلع اح يوازى ضلع دو تكون زاوية احب مساوية لزاوية دوه فلذا تبقى زاوية باح مساوية لزاوية هدو ولتساوى الزوايا فى مثلثى ابح و دهو يكونان متشابهين
ثانيا (شكل ١٢٤) اذا كان فى مثلثى ابح و دهو ضلع ده عمودا على اب و دو على اح ومن كون زاويتى ح و ط فى شكل ذى اربعة اضلاع ا ط د ح قائمتين بالفرض وزوايا ذى اربعة اضلاع

مساوية

مساوية لاربع قوائم انظر (مقالة ١) يكون الباقي وهو مجموع زاويتي طاح و طدح مساويا للقائمتين ولكون مجموع زاويتي هدو و طدح المتجاورتين مساويا للقائمتين تكون زاوية هدو مساوية لزاوية طاح او باح اذا طرحت طدح المشتركة من المتساويين وايضا على ماصرح به يثبت من كون الضلع الثالث هو عمودا على بح ان تكون زاوية دوه مساوية لزاوية ح وزاوية دهو مساوية لزاوية ب كما صرح به ويصير المثلثان المتعامدا الاضلاع متساويي الزوايا ومتشابهين

تنبيه حين تتوازى الاضلاع تكون متناظرة ومتى كانت عمادا فكذلك تكون متناظرة فعلى ما يرى من شكل مائة واربعة وعشرين ان ضلع ده مناظر لضلع اب وضلع دو مناظر لضلع اح وضلع هو مناظر لضلع بح ومتى تعامدت الاضلاع فتارة يكون وضع المثلثين المذكورين ليس كما يرى من (شكل ١٢٤) وان وجد على وضع آخر فيثبت ايضا بتساوي الزوايا سواء كان بالشكل ذي اربعة اضلاع مثل اطدح الذي له قائمتان او بتقدير المثلثين القائمي الزاوية ذوي الرؤس المتقابلة ولاجل سهولة ذلك يرسم في مثلث ابح مثلث دهو تكون اضلاعه موازية لاضلاع المثلث المقدر بمثلث ابح فاثبات هذه الطريقة هو كما ثبت في (شكل ١٢٤) ولا يحتاج الى اثبات اخر

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

(شكل ١٢٥) اذا وصل من راس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة او و اد لخ قدر ما يراد فهذه الخطوط الموصولة تقسم قاعدة بح وما وازاها نحو ده على التناسب يعني ان تكون نسبة دل : بو :: لك : ور :: كط : رح لخ

لانه من كون خط دل موازيا لخط بو يكون مثلثا ادل و ابو متساويي الزوايا ومتشابهين وبهذا تحدث هذه المتناسبة اعني دل : بو :: ال : او وايضا بتوازي لك و ر

تكون ال : او :: لك : ور ولاشتراك ال : او فى كل من التناسبين تكون النسبتان متساويتين لتساوى كل منهما بالنسبة المشتركة المحذوفة فتصير نسبة دل : سو :: لك : ور وايضا لك : ور :: طك : رح وهكذا على التوالى تكون متناسبة فعلى هذا ثبت المطلوب من انه كما تنقسم قاعدة سح فى نقط و و ر و ح ينقسم خط ده الموازى لها فى نقط ل و ك و ط

نتيجة اذا انقسمت قاعدة سح الى اقسام متساوية فى نقط و و ر و ح كذلك ينقسم خط ده الموازى لها فى نقط ل و ك و ط على التساوى

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

(شكل ١٢٦) اذا انزل عمود اد من زاوية ا القائمة من مثلث قائم الزاوية على وترها سح اولا يكون المثلثان الحادثان اسد و ادح متشابهين وكل واحد منهما مشابه للمثلث اسح الكامل

ثانيا ان كل واحد من ضلعى اس و اح المحيطين بالقائمة يصير وسطا متناسبا بين سح وتر القائمة والقسم المجاور له سد أو دح

ثالثا ان اد العمود النازل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا بين قسمى سد و دح

الحالة الاولى لان فى مثلثى ساد و ساح زاويتى سدا و ساح متساويتان لقيامهما ولاشتراك زاوية س فيهما تكون زاوية ساد الثالثة الباقية مساوية لزاوية ح الثالثة الاخرى ويتشابه المثلثان المذكوران وبمثل هذا ثبت ان يكون مثلث داح مشابها لمثلث ساح ومن ثمة تكون المثلثات الثلاثة متساوية الزوايا ومتشابهة

الحالة الثانية من كون مثلث ساد مشابها لمثلث ساح تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة ويكون ضلع سد فى المثلث الاصغر نظير لضلع اس فى المثلث الاكبر فانهما موتران لزاويتى ساد و سحا المتساويتين وكذلك وتر سا فى المثلث الاصغر يكون نظير الوتر سح

فى المثلث الاكبر ومن ثمة حصل هذا التناسب ب د : ب ا :: ب ا : ب ج وايضا نسبة د ج : ا ج :: ا ج : ب ج فلذا ظهر ان كل واحد من ضلعى ا ب و ا ج وسط متناسب بين وتر القائمة والقسم المجاور له

الحالة الثالثة من تشابه مثلثى ا ب د و ا د ج تصير أضلاعهما المتناظرة متناسبة ويظهر هذا التناسب أعنى نسبة ب د : ا د :: ا د : د ج ومن ثمة يثبت المطلوب وهو ان يكون عمود ا د وسطا متناسبا بين قسمى ب د و د ج جزأى وتر القائمة

تنبيه حيث ان مستطيل الطرفين يساوى مستطيل الوسطين فى تناسب ب د : ا ب :: ا ب : ب ج يكون ا ب^2 = ب د × ب ج

وأيضا يكون ا ج^2 = د ج × ب ج فاذا جمعت هذه الاشياء المتساوية يصير ا ب^2 + ا ج^2 = ب د × ب ج + د ج × ب ج ولاتحاد الحد الثانى فى كل من هذين المستطيلين صار (ب د + د ج) × ب ج = ا ب^2 + ا ج^2 فاذا أخذ ب ج بدلا عن حدى ب د + د ج يصير ب ج × ب ج = ب ج^2 = ا ب^2 + ا ج^2 ومن ثمة ظهر ان مربع ج ب وتر القائمة مساو لمجموع مربعى ا ب و ا ج الضلعين الآخرين

قد ذكر فيما تقدم ان مربع وتر القائمة فى المثلث القائم الزاوية مساو لمجموع مربعى الضلعين الباقيين وقد ثبت ذلك فى هذا المحل على وجه آخر لكن فى هذا الوجه فرق كبير عن الوجه السابق ومن هذا يقال حيث ان قضية مربع وتر القائمة ناشئة عن تناسب اضلاع المثلثات المتشابهة صارت الدعاوى التى هى أساس علم الهندسة قليلة العدد حتى صارت كأنها عبارة عن مثلثات متناسبة الاضلاع متساوية الزوايا فعلى ما ترى من هذا المثال ان ما ينتج من الدعوى أو الدعاوى وافق ما قد صدقت عليه دعوى مثبتة أخرى

وذلك دليل على ان براهين الهندسة قطعية ولو وقع فى بعض الاثبات أدنى سهو لكان محسوسا ولو بعد دعاوى كثيرة حيث ان سائر براهين الهندسة مبنية على القضية البديهية التى تفحم الخصم وتجبره على التسليم

نتيجة (شكل ١٢٧) اذا وصل وترا ا ب و ا ح من نقطة آ الواقعة على المحيط الى نهايتى قطر ب ح فزاوية ا من مثلث ا ب ح تصير قائمة فلذا عمود ا ى يكون وسطا متناسبا بين سهمى ب ى و ى ح ووتر ا ب بين قطر ب ح وبين سهم ب ى المجاور له فيصير $\overline{ا ب}^{٢}$ = ب ى × ب ح وحيث ان وتر ا ح وسط متناسب بين قطر ب ح وبين سهم ى ح المجاور له يكون $\overline{ا ح}^{٢}$ = ب ح × ى ح فيحصل من كلتا المعادلتين تناسب نحو $\overline{ا ب}^{٢}$: $\overline{ا ح}^{٢}$ :: ب ى : ى ح واذا قدم مربعا $\overline{ا ب}^{٢}$ و $\overline{ب ح}^{٢}$ تصير $\overline{ا ب}^{٢}$: $\overline{ب ح}^{٢}$ :: ب ى : ب ح وكذلك $\overline{ا ح}^{٢}$: $\overline{ب ح}^{٢}$ :: ى ح : ب ح وتناسب هذه المربعات سواء كان بعضها أو بوتر القائمة قد سبق ذكره فى النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس فتأمل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

اذا تساوت زاويتان من المثلثين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيلى الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين

مثلا (شكل ١٢٨) نسبة مثلث ا ب ح الى مثلث ا ى ه المتساويى الزاوية كنسبة مستطيل ا ب × ا ح الى مستطيل ا ى × ا ه لانه اذا وصل ب ه فمن كون رأس ه مشتركة فى مثلثى ا ب ه و ا ى ه واتحاد ارتفاعهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا ب و ا ى يعنى تكون ا ب ه : ا ى ه :: ا ب : ا ى وأيضا من اتحاد الارتفاع فى مثلثى ا ب ح و ا ب ه تكون نسبة

ا ب ح

اب : اهـ :: اح : اهـ

فاذا ضربت حدود هذين التناسبين على الترتيب تكون ا هـ × ا ح : اد هـ × ا هـ :: ا ب × اح : اد × اهـ وحيث لا خلل فى مقدار هذا التناسب اذا حذف منه المضروب فيه المشترك وهو ا هـ ثبت المطلوب وهو ان اح : ادهـ :: اب × اح : اد × اهـ

نتيجة اذا كان مستطيل اب × اح يساوى مستطيل اد × اهـ يكون المثلثان المذكوران متكافئين أو اذا كانت نسبة اب : اد :: اهـ : اح يكون المثلثان المرقومان متكافئين وخط حد يوازى خط بهـ

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

النسبة بين المثلثين المتشابهين كالنسبة بين مربعى ضلعيهما المتناظرين (شكل ١٢٢) لان زاوية ا مساوية لزاوية د فى مثلثى ابح و دهو وكذا زاوية ب مساوية لزاوية هـ فتكون نسبة ابح : دهو :: اب × اح : دهـ × دو كما صرح به فى الدعوى التى تقدمت وايضا بتشابه المثلثين تكون نسبة اب : دهـ :: اح : دو فاذا ضرب حدود هذا التناسب على الترتيب فى حدود تناسب اح : دو :: اح : دو الحاصل من نسبة واحدة حدا فى حد يحصل تناسب اب × اح : دهـ × دو :: $\overline{\text{اح}}^{2}$: $\overline{\text{دو}}^{2}$ فلوجود النسبة المشتركة فى هذا التناسب وفى التناسب الذى تقدم يكون ابح : دهو :: $\overline{\text{اح}}^{2}$: $\overline{\text{دو}}^{2}$ فعلم ان نسبة مثلثى ابح و دهو المتشابهين كنسبة مربعى ضلعيهما حا و دو أو كنسبة مربعى ضلعيهما المتناظرين الآخرين وبهذا ثبت المطلوب

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

كثيرا الاضلاع المتشابهان مركبان من مثلثات متشابهة متناظرة متحدة العدد متماثلة الوضع

(شكل ١٢٩) لانه اذا وصل وترا اح و اد من ا زاوية كثير الاضلاع ا ب ح د هـ ووترا وح و وط من و نظيرة ا من كثير الاضلاع و ز ح ط ى فمن تشابه الشكلين تصير زاوية ا ب ح مساوية لزاوية و ز ح نظيرتها (حد ٢) وما عدا هذا يكون ضلعا ا ب و ب ح متناسبين لضلعى و ز و ز ح ومن ثمة صارت نسبة ا ب : و ز :: ب ح : ز ح ويكون مثلثا ا ب ح و و ز ح متشابهين لاتحاد زاويتهما مع تناسب الاضلاع المحيطة بهما فاذا تكون زاوية ب ح ا مساوية لزاوية ز ح و فاذا طرحت هاتان المتساويتان من زاويتى ب ح د و ز ح ط المتساويتين تبقى زاويتا ا ح د و و ح ط متساويتين ولتشابه مثلثى ا ب ح و و ز ح تكون نسبة ا ح : و ح :: ب ح : ز ح ومن تشابه كثيرى الاضلاع تكون ايضا نسبة ب ح : ز ح :: ح د : ح ط ولاشتراك النسبة فى هذين التناسبين تكون نسبة ا ح : و ح :: ح د : ح ط وقد ثبت تساوى زاويتى ا ح د و و ح ط فصار مثلثا ا ح د و و ح ط متشابهين لاتحاد زاويتهما مع تناسب الاضلاع المحيطة بهما مثنى وثبت تشابه جميع المثلثات المركب منها كثيرا الاضلاع المفروضان نظرا الى عدة اضلاعهما كما صرح به ومن ثمة ظهر ان يكون كثيرا الاضلاع المتشابهان مركبين من مثلثات متشابهة متحدة فى العدد ومتماثلة فى الوضع وبه يثبت المطلوب

تنبيه أيضا عكس هذه صحيح أعنى ان كل كثيرى الاضلاع اذا تركبا من مثلثات متشابهة متحدة العدد متماثلة الوضع يصيران متشابهين لان تشابه المثلثات يوجب ان تكون زاوية ا ب ح = و ز ح و ب ح ا = ز ح و و ا ح د = و ح ط ولذا صارت ب ح د = ز ح ط وأيضا تكون زاوية ح د هـ = ح ط ى الخ وما سوى هذا تكون نسبة ا ب : و ز :: ب ح : ز ح

: دح :: اح : وح :: حى : حط الخ وحيث ثبت تساوى زوايا كثيرى الاضلاع مع تناسب الاضلاع فهما متشابهان

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية)

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين اضلاعهما المتناظرة والنسبة بين سطوحهما كالنسبة بين مربعات اضلاعهما المتناظرة (شكل ١٢٩) أولا من تشابه الشكلين تكون نسبة اب : ود :: بح : دح :: حى : حط الخ وحيث كانت نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التوالى كنسبة مقدم الى تاليه فعلى هذا ظهر ان نسبة مجموع المقدمات اعنى اب + بح + حى الخ أى محيط الشكل الاول الى مجموع التوالى اعنى ود + دح + حط الخ أى محيط الشكل الثانى كنسبة أحد المقدمات الى أحد التوالى يعنى ضلع اب الى نظيره ود

ثانيا من تشابه مثلثى ابح و ودح تكون نسبة ابح : ودح :: $\overline{اح}^{٢}$: $\overline{وح}^{٢}$ ومن تشابه مثلثى احى و وحط كذلك تكون احى : وحط :: $\overline{اح}^{٢}$: $\overline{وح}^{٢}$ ولاشتراك $\overline{اح}^{٢}$: $\overline{وح}^{٢}$ فى هذين التناسبين صارت نسبة

ابح : ودح :: احى : وحط وبمثل هذا يثبت كون نسبة احى : وحط :: اىه : وطى فعلى هذا يحكم بأن تكون جميع المثلثات متناسبة لوجود النسب المتساوية فيها على التوالى ومن كون نسبة مجموع المقدمات التى هى ابح + احى + اىه أومساحة كثير الاضلاع ابحىه الى مجموع التوالى أعنى ودح + وحط + وطى أومساحة كثير الاضلاع ودحطى كنسبة ابح أحد المقدمات الى تاليه وهو ودح أوكنسبة $\overline{اب}^{٢}$ الى $\overline{ود}^{٢}$ من أجل ذلك ظهر ان نسبة سطوح

كثيرى الاضلاع المتشابهين كنسبة مربعات اضلاعهما المتناظرة
ويثبت المطلوب
نتيجة اذا انشئت ثلاثة أشكال كثيرة الاضلاع متشابهة بأن تكون اضلاعها
المتناظرة مساوية لثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية فساحة الشكل المرسوم على
وتر القائمة تكون مساوية لمجموع مساحة الاثنين الآخرين لانه يلزم من كون
نسبة الثلاثة أشكال المرسومة كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة
ومن حيث ان فى المثلث القائم الزاوية مربع الوتر مساو بالمجموع مربعى الضلعين
الآخرين فعلى مقتضى التناسب مساحة مجموع الشكلين تكون مساوية لمساحة
الشكل الآخر المنشأ على الوتر

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية)

*(شكل ١٣٠) ابزاء وترى اب و حد المتقاطعين داخل الدائرة تكون
متناسبة تناسبا مقلوبا وهو ان تكون اه : ده :: حه : هب
لانه اذا وصل بد و اح فلوجود زاوية ه مشتركة فى مثلثى احه
و به د الحادثين وتساوى زاويتى ا و د لوقوعهما فى قطعة
واحدة وكذا زاويتا ب و ح يكون المثلثان المرقومان متشابهين
والتناسب الاضلاع المتناظرة منهما علم ان نسبة اه : ده :: حه
: به وثبت المطلوب

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية)

(شكل ١٣١) اذا تعين قوس بح المقعر بوصل خطى هب و هح
القاطعين المتلاقيين فى نقطة ه الواقعة خارج الدائرة فالقاطعان
الكاملان المذكوران يكونان متناسبين لقسميهما الخارجين تناسبا مقلوبا وهو
ان تكون نسبة هب : هح :: هد : ها
لانه اذا وصل اح و دب فلاشتراك زاوية ه فى مثلثى هاح و
هبد الحادثين ووقوع زاويتى ب و ح فى قطعة واحدة تكونان
متساويتين فيتشابه المثلثان وتكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة

فلذا صارت نسبة هـ ب : هـ ح :: هـ د : هـ ا وثبت المطلوب
(نتيجة) من تساوي مستطيل الطرفين بمستطيل الوسطين يكون مستطيل احد القاطعين بجزئه الخارج مساويا لمستطيل القاطع الآخر بجزئه الخارج عن الدائرة اعني ان مستطيل هـ ب × ا هـ يساوي مستطيل هـ ح × هـ د
تنبيه اعلم ان هذه الدعوى بينها وبين الدعوى التي تقدمت مناسبة وموافقة وانما تختلف تلك الدعوى بتقاطع وتري ا ب و ح د داخل الدائرة بخلاف هذه فان وتريها يتقاطعان خارج الدائرة
وأما الدعاوى الآتية فكأنها صور مخصصة لهذه الدعوى

(الدعوى الثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٢) اذا وصل من نقطة هـ الواقعة خارج الدائرة خطا ا هـ المماس و هـ ح القاطع فالخط المماس المذكور يكون وسطا متناسبا بين الخط القاطع وجزئه الخارج أعني ان تكون هـ ح : هـ ا :: هـ ا : هـ د

فعلى هذا تكون $\overline{\text{هـ ا}}^{2}$ = هـ ح × هـ د

لانه اذا وصل ا د و ا ح ففي مثلثي هـ ا د و هـ ا ح زاوية هـ المشتركة وزاوية هـ ا د الحاصلة من وتر وخط مماس يكون نصف قوس ا د معيارا لها ومن كون القوس المذكور أيضا معيارا لزاوية ح تكون زاوية هـ ا د مساوية لزاوية ح ويكون المثلثان المذكوران متشابهين ومن ثمة كانت نسبة هـ ح : هـ ا :: هـ ا : هـ د ويكون $\overline{\text{هـ ا}}^{2}$ = هـ ح × هـ د ويثبت المطلوب

(الدعوى الحادية والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٣) في أي مثلث كمثلث ا ب ح اذا نصفت زاويته ا بخط ا د فمستطيل ا ب و ا ح الضلعين المحيطين بها مساو لمستطيل قسمي ب د و د ح ومربع ا د المنصف * لانه اذا رسم محيط دائرة مار بزوايا مثلث

ا ب ح ومد خط ا د حتى انتهى الى محيط الدائرة ووصل هـ ح فمثلث ب ا د الحادث يشابه مثلث هـ ا ح * لانه يلزم من كون زاوية ب ا د مساوية لزاوية هـ ا ح كما فرض وزاوية ب و هـ متساويتين لوقوعهما فى قطعة واحدة أن يكون المثلثان المذكوران متشابهين وتكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة اعنى ان نسبة ا ب : ا هـ :: ا د : ا ح وبهذا يكون ا ب × ا ح = ا هـ × ا د لكن حيث ان ا هـ = ا د + د هـ اذا ضرب كل من هذين المتساويين فى خط ا د يكون ا هـ × ا د = $\overline{اد}^{٢}$ + ا د × د هـ لكن من كون ا د × د هـ = ب د × د ح يكون ب ا × ا ح = $\overline{اد}^{٢}$ + ب د × د ح ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٤) مستطيل عمود ا د النازل من رأس مثلث على قاعدته و ح هـ الذى هو قطر الدائرة المرسومة على المثلث المذكور مساو لمستطيل ضلعى ا ب و ا ح المحيطين بزاوية الرأس

لانه اذا وصل ا هـ فى أحد مثلثى ا ب د و ا ح هـ زاوية ا مساوية لزاوية د فى الاخر لكونهما قائمتين وزاويتا ب و هـ متساويتان لوقوعهما فى قطعة واحدة فعلى هذا يكون المثلثان المذكوران متشابهين فظهر ان نسبة ا ب : هـ ح :: ا د : ا ح ويكون ا ب × ا ح = هـ ح × ا د ويثبت المطلوب

نتيجة اذا ضرب كل من هذين المقدارين المتساويين فى ب ح بعينه يصير ا ب × ا ح × ب ح = ح هـ × ا د × ب ح لكن حيث ان مستطيل ا د × ب ح مساوى ضعف مساحة ذلك المثلث فحاصل ضرب الاضلاع الثلاثة من مثلث يساوى حاصل ضرب ضعف سطحه فى قطر الدائرة المرسومة عليه وما يأتى من ضرب الثلاثة خطوط فى بعض يدل على

مساحة جسم فحينئذ تتصور تلك الخطوط كالاعداد الحسابية كما لا يخفى

تنبيه ثبت ان مساحة أى مثلث تساوى حاصل ضرب نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخل ذلك المثلث بجميع اضلاعه اعنى محيطه

لانه فى (شكل ٨٧) رؤس مثلثات اح ب و ب ح ج و اح ج مشتركة فى نقطة ح وحيث ان نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث ا ب ج هو ارتفاع مشترك لتلك المثلثات يعلم ان مجموع مساحة المثلثات المذكورة يساوى حاصل ضرب قواعد اب و ب ج و اج فى ربع قطر ح ى فتبين ان مساحة مثلث ا ب ج تساوى حاصل ضرب مجموع اضلاعه الثلاثة فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخل ذلك المثلث

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٥) كل شكل ذى أربعة اضلاع مرسوم داخل الدائرة مثل ا ب ج ى متسطيل قطريه اج و ب ى يساوى مجموع مستطيلى الاضلاع المتقابلة يعنى يكون اج × ب ى = اب × ج ى + اى × ب ج

لانه اذا أخذ ج هـ مساويا للقوس اى ووصل ب هـ يقطع قطر اج فى نقطة و فمثلثا ب و ج و اب ى الحادثان يصيران متشابهين حيث ان نصف كل من قوسى اى و هـ ج المتساويين هو مقدار زاويتى اب ى و ج ب و فهما متساويتان ولوقوع كل من زاويتى اى ب و ب ج و فى قطعة ا هـ ب تكونان أيضا متساويتين فعلى هذا صار مثلثا اب ى و ج ب و متشابهين لتساوى الزوايا المتناظرة فيهما مثنى وتكون نسبة اى : ج و :: ب ى : ب ج وبهذا صار اى × ب ج = ب ى × ج و

وأيضا مثلث اب و يشابه مثلث ب ى ج لانه اذا زيد ى هـ على كل من قوسى اى و هـ ج المتساويين يصير قوس اهـ و قوس ج ى متساويين وحينئذ زاوية اب و تساوى ى ب ج ولوقوع زاويتى ب ا و و ب ى ج فى قطعة واحدة تكونان متساويتين فلذا تشابه مثلثا اب و

و دج وتشابهت اضلاعهما المتناظرة وصارت نسبة اب : بد
:: او : جد و اب × جد = بد × او فاذا جمعت
الحواصل المتساوية السالفة على هذين الحاصلين يصير اب × جد +
اد × بج = دب × او + بد × جو لكن بد
× او + بد × جو = بد × (او + جو) = بد
× اج وبهذا ثبت المطلوب وهو ان اب × جد + اد ×
بج = بد × اج

تنبيه هنالك دعوى أخرى تتعلق بذي الاربعة الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
يمكن اثباتها كما صرح به فيما مضى وذلك انه من تشابه مثلثي ابد و بجو
تكون نسبة بد : بج :: اب : بو ويصير بو × بد =
بج × اب ومتى وصل جه فثلث وجه الحادث يشابه كلا من مثلثي
اوب و بدج وتكون نسبة بد : جه :: دج : هو
و هو × بد = جه × دج ومن كون جه = اد
يصير هو × بد = اد × دج فاذا جمعت الحواصل المتساوية
السالفة على هذه المتساوية يصير بو × بد + هو × بد =
بج × اب + اد × جد لكن بو × بد + هو ×
بد = بد × (بو + هو) = بد × به فلذا يكون
بد × به = بج × اب + اد × دج واذا أخذ
بر مساويا القوس اد ووصل خط جر فعلى ما صرح به الآن
يصير جر × جا = اب × اد + بج × جد لكن
قوس بر = جه فاذا ضم على كل من هذين المتساويين قوس
بج يصير قوس جبر = بجه ومن ثمة كان وتر جر مساويا
لوتر به فلذا صارت النسبة بين مستطيلي به × بد و جر × جا
كالنسبة بين قطري بد و جا وحينئذ تكون نسبة بد : جا
:: اب × بج + اد × دج : اد × اب + بج ×

حد فبناء على ذلك علم ان النسبة بين قطرى ذى الاربعة الاضلاع كالنسبة بين المستطيلين الحادثين من الضلعين المتصلى النهايتين وكل من هاتين القضيتين مستعمل فى استخراج الاقطار اذا كانت الاضلاع معلومة

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية)

(شكل ١٣٦) اذا كانت نقطة د واقعة على نصف قطر اح داخل الدائرة ونقطة هـ واقعة على استقامته خارجها وكانت نسبة حد : حا :: حا : حهـ فكل خطين مستقيمين موصولين نحو م د و م هـ من م أى نقطة واقعة على ذلك المحيط الى نقطتى د و هـ المذكورتين يكونان على نسبة واحدة أعنى نسبة م د : م هـ :: ا د : ا هـ * لانه فرض ان نسبة حد : حا :: حا : حهـ فاذا أخذ حم المساوى لقطر حا عوضا عنه تصير نسبة حد : حم :: حم : حهـ ولاشتراك زاوية ح فى مثلثى حدم و وهم وتناسب الاضلاع المحيطة بها يتشابه المثلثان المذكوران وتكون نسبة الضلع الثالث م د فيهما الى ضلع م هـ كنسبة حد الى حم أوالى حا لكن نسبة حد : حا :: حا : حهـ وحيث ان المتناسبة لم تزل متناسبة بطريقة الفضل تكون نسبة حد : حا :: حا — حد : حهـ — حا أو حد : حا :: اد : اهـ وبتساوى النسبة فى هذا التناسب والذى تقدم ثبت المطلوب وهو ان نسبة م د : م هـ :: ا د : ا هـ

(بيان الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة)

(الدعوى الاولى العملية)

طريقة تقسيم الخط المستقيم المحدود الى اقسام متساوية بقدر ما يراد * اوالى اقسام متناسبة لخطوط معلومة

(شكل ١٣٧) الحالة الاولى اذا اريد تقسيم خط ا ب المستقيم الى خمسة اقسام متساوية يرسم خط ا لـ غير المحدود من نهاية ا ويؤخذ مقدار ما

اح ويبقل على خط اك خمس مرات ويوصل بين د نهاية القسم الخامس وبين ب بخط دب فاذا رسم خط حج موازيا لخط دب فقسم اج يكون خمس اب فاذا اخذ قسم اج خمس مرات على خط اب فينقسم الى خمسة اقسام متساوية لانه يلزم من كون خط حج موازيا لخط دب ان يقطع خطا اب و اد في نقطتى ح و ج على التناسب ولكن من كون قسم اح خمس خط اد يكون اج خمس خط اب

الحالة الثانية (شكل ١٣٨) اذا أريد تقسيم خط اب الى اقسام متناسبة لخطوط ن و م و ل المعلومة يرسم من نقطة ا خط اد غير محدود ويؤخذ خط اح مساويا للمقدار ن و حد مساويا للمقدار م و ده مساويا للمقدار ل ويوصل بين نهايتى ب و ه فاذا رسم من نقطتى ح و د خطا حج و دو موازيين لخط هب فاقسام خط اب وهى اج و جو و وب تكون متناسبة لخطوط ن و م و ل المفروضة

لانه من كون خطوط حج و دو و هب متوازية تكون أقسام اج و جو و وب متناسبة لاقسام اح و حد و ده ومن كون أقسام اح و حد و ده مساوية لاقسام ن و م و ل فتكون اج و جو و وب وهى أقسام خط اب متناسبة لتلك الخطوط المفروضة ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية العملية)

(شكل ١٣٩) طريقة استخراج الرابع المتناسب لثلاثة خطوط معلومة ا و ب و ح يرسم خطا دهـ و دو على ان يحدثا زاوية ويؤخذ على خط ده خط دب مساويا لخط ا وخط دج مساويا لخط ب وعلى خط دو يؤخذ دى مساويا لخط ح ويوصل دى فاذا رسم خط جط موازيا لخط بى فخط دط يكون هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون خط طح موازيا لخط رى ان يحصل هذا التناسب وهو ان تكون نسبة در : دح :: دى : دط وحيث ان فى هذا التناسب ثلاثة حدود مساوية للثلاثة خطوط المعلومة صارت نسبة ا : ت :: ح : دط وثبت المطلوب من أن يكون خط دط هو الرابع المتناسب
نتيجة وكذلك يستخرج الثالث المتناسب لمقدارى ا و ب المعلومين كما يستخرج الرابع المتناسب لان استخراج الثالث المتناسب هو عين استخراج الرابع المتناسب لثلاثة خطوط ا و ب و ب المعلومة المذكورة

(الدعوى الثالثة العملية)

طريقة استخراج الوسط المتناسب بين مقدارى ا و ب المعلومين (شكل ١٤٠) يؤخذ على خط دو المستقيم الغير المحدود دهـ = ا و هو = ب ويجعل دو نصف قطر ويرسم نصف محيط دزو ويقام على القطر عمود هز من نقطة هـ ويمد ذلك العمود حتى يلاقى المحيط فى نقطة ز فعمود هز هو الوسط المتناسب المطلوب * لانه يلزم من كون عمود هز منزلا على القطر من نقطة ز الواقعة على المحيط ان يكون وسطا متناسبا بين سهمى دهـ و هو ومن كون هذين السهمين مساويين لخطى ا و ب المعلومين ثبت المطلوب من أن يكون ذلك العمود وسطا متناسبا بين مقدارى ا و ب

(الدعوى الرابعة العملية)

(شكل ١٤١) طريقة تقسيم خط اب المستقيم المعلوم الى قسمين بان يكون القسم الاكبر وسطا متناسبا بين الخط الكامل والجزء الاصغر فيقام عمود بح من نقطة ب مساويا لنصف اب ويجعل نقطة ح مركزا وبنصف قطر بح يرسم محيط دائرة فاذا وصل اح يقطع محيط الدائرة فى نقطة د فاذا أخذ او مساويا لخط اد فخط اب ينقسم فى نقطة و كما هو المطلوب بحيث تكون نسبة اب : او :: او : وب

لانه يلزم من كون خط ا ب عمودا مخرجا من نهاية نصف قطر ب ح ان يكون خطا مماسا فاذا امتد خط ا ح على استقامته حتى يقطع أيضا محيط الدائرة فى نقطة هـ فخط ا هـ يصير قاطعا ومن ثمة كانت نسبة ا ب : ا هـ :: ا ى : ا ب وحيث لا زالت الاربعة المتناسبة متناسبة اذا كانت على طريق الفضل فتكون نسبة ا هـ — ا ب : ا ب :: ا ب — ا ى : ا ى وحيث كان نصف قطر ب ح مساويا بالنصف ا ب بالعمل يكون ى هـ مساويا بالخط ا ب ولذا يكون ا هـ — ا ب = ا ى = ا و وأيضا من كون ا ى = ا و يكون ا ب — ا ى = ب و فاذا وضعت هذه الاشياء موضع ما ساواها من التناسب السابق فتكون نسبة ا و : ا ب :: و ب : ا ى أو : ا و وبطريق العكس تكون نسبة ا ب : ا و :: ا و : و ب وبها يثبت المطلوب

تنبيه وتارة يسمى هذا التقسيم نسبة الوسط والطرفين يعنى ان الخط المقسوم بطريق نسبة الوسط والطرفين هو ما كانت نسبته الى جزئه الاكبر كنسبة جزئه الاكبر الى جزئه الاصغر واعلم ان خط ا هـ ينقسم فى نقطة ى على طريق نسبة الوسط والطرفين لانه يلزم من كون ا ب = ى هـ ان تكون نسبة ا هـ : ى هـ :: ى هـ : ا ى

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ١٤٢) طريقة رسم خط ى ا ب المستقيم المار من نقطة ا المفروضة داخل زاوية ى ح ب بأن يكون قسماه ا ى و ا ب الواقعان بين نقطة آ وبين طرفى الزاوية المذكورة متساويين

أقول متى رسم خط ا هـ من نقطة آ موازيا بالخط ى ح وأخذ خط هـ ب مساويا بالخط ح هـ ومر بخط ى ا ب المستقيم من نقطتى ب و ا فهو الخط المطلوب

لانه يلزم من كون خط ا هـ موازيا بالخط ح ى ان تكون نسبة ب هـ : هـ ح :: ب ا : ا ى وحيث ان ب هـ = هـ ح بالعمل يثبت ان يكون

اب = اد

(الدعوى السادسة العملية)

طريقة انشاء مربع مكافئ لشكل متوازى الاضلاع معلوم أو لمثلث مفروض

(شكل ١٤٣) اولا اذا كان ابحد متوازى الاضلاع معلوما و اب قاعدته و ده ارتفاعه أقول يستخرج طى الوسط المتناسب بين قاعدة اب وارتفاع ده وينشا على الوسط المذكور مربع فهذا المربع يصير مكافئا للمتوازى الاضلاع ابحد

لانه يلزم من كون نسبة اب : طى :: طى : ده ان يكون طى^{٢} = اب × ده ومن كون مستطيل اب × ده هو مساحة متوازى الاضلاع من أجل ذلك ثبت المطلوب ان يكون المربع المنشأ على على طى مكافئا متوازى الاضلاع المفروض

ثانيا (شكل ١٤٤) اذا كان بح قاعدة مثلث ابح المفروض و اد ارتفاعه فيؤخذ الوسط المتناسب بين قاعدة بح ونصف ارتفاع اد وينشأ على هذا الوسط مربع فهذا المربع يكافئ مثلث ابح

لانه يلزم من كون نسبة بح : طى :: طى : $\frac{١}{٢}$ اد بالعمل ان يكون طى^{٢} = بح × $\frac{١}{٢}$ اد وحيث ان بح × $\frac{١}{٢}$ اد مساحة لمثلث ابح ثبت المطلوب من ان يكون المربع المنشأ على طى مكافئا له

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٤٥) طريقة رسم مستطيل ادهط على خط اد المستقيم المفروض مكافئا المستطيل اب و ح

فيستخرج الرابع المتناسب لخطوط اد و اب و اح وهو اط فالمستطيل الحادث من خطى اد و اط يكافئ مستطيل ابوح لانه يلزم من كون نسبة اد : اب :: اح : اط بالعمل ان يكون اد × اط = اب × اح فلذا صار مستطيل ادهط مكافئا لمستطيل ابوح وثبت

المطلوب

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ١٤٨) طريقة تعيين نسبة مستطيل خطى ا و ب المفروضين لمستطيل خطى ح و د المعلومين الآخرين بالخط

فاذا استخرج س الرابع المناسب للثلاثة مقادير ب و ح و د فالنسبة التى بين خط ا وخط س تساوى النسبة التى بين مستطيلى ا × ب و ح × د

لانه يلزم من كون نسبة ب : ح :: د : س بالعمل ان يكون ح × د = ب × س ولكن فى تناسب ا × ب : ح × د :: ا × ب : ح × د الحاصل من عين نسبة واحدة اذا وضع ب × س عوضا عن مساويه ح × د فتكون نسبة ا × ب : ح × د :: ا × ب : س × ب فاذا قسم حدا النسبة الاخيرة من هذا التناسب على مقدار ب فلاخلل فى التناسب واذا يكون ا × ب : ح × د :: ا : س ويثبت المطلوب

(نتيجة) لاجل تعيين النسبة بين المربعين المنشاين على خطى ا و ح المستقيمين يستخرج س الثالث المتناسب لخطى ا و ح بان تكون نسبة ا : ح :: ح : س وتضرب حدود هذا التناسب بحدود ا : ح :: ا : ح الحاصل من نسبة واحدة حدا بحد فتكون نسبة $ا^٢ : ح^٢$ :: ا × ح : ح × س وحيث لاخلل فى التناسب اذا قسم حدا النسبة الاخيرة على مقدار ح ثبت المطلوب من أن يكون نسبة $ا^٢ : ح^٢$ :: ا : س

(الدعوى التاسعة العملية)

(شكل ١٤٩) طريقة تعيين النسبة بين حاصل ضرب ا و ب و ح

الثلاثة خطوط المعلومة و بين حاصل ضرب د و هـ و و الآخر بالخط أولا يستخرج س الرابع المناسب لخطوط د و ا و ب المعلومة وكذا يستخرج ى الرابع المناسب لخطوط ح و هـ و و فالنسبة التى بين س و ى كالنسبة بين حاصل ا × ب × ح وحاصل د × هـ × و

لانه من كون نسبة د : ا :: ب : س بالعمل يكون ا × ب = د × س

فاذا ضربت كل واحدة من هذه الاشياء المتساوية بمقدار ح يصير ا × ب × ح = د × س × ح وأيضا يلزم من كون نسبة ح : هـ :: و : ى بالعمل ان يكون ح × ى = هـ × و فاذا ضرب كل واحد من هذين المتساويين فى مقدار د يكون ح × ى × د = د × هـ × و فاذا وضعت هذه الاشياء والاشياء المتساوية المذكورة من قبل فى هيئة التناسب تصير ا × ب × ح : د × هـ × و :: د × س × ح : ح × ى × د فاذا قسم حدا النسبة الاخيرة على مقدار د × ح فلا خلل ومن ثمة يثبت المطلوب من ان تكون ا × ب × ح : د × هـ × و :: س : ى

(الدعوى العاشرة العملية)

طريقة انشاء مثلث مكافئ لشكل كثير الاضلاع معلوم

(شكل ١٤٦) أولا لاجل انشاء مثلث مكافئ لشكل كثير الاضلاع ابحدهـ يفرق مثلث حدهـ بوصل وتر حهـ ومن نقطة د يرسم خط دو موازيا لخط حهـ وملاقيا لخط اهـ المخرج فاذا وصل خط حو فالشكل ذو اربعة اضلاع ابحو الحادث يكافئ شكل كثير الاضلاع ابحدهـ الذى له ضلع زائد عنه * لانه يلزم من اشتراك قاعدة حهـ فى مثلثى حدهـ و حوهـ ووقوع رؤسهما د و و على خط دو الموازى لتلك القاعدة ان يكون ارتفاعهما واحدا ويكونان متكافئين فاذا جمع على شكل ابحهـ كل من هذين المثلثين

المتكافئين يحصل شكل كثير الاضلاع ا ب ح د هـ من جهة ومن الاخرى يحصل ذو اربعة اضلاع ا ب ح و فلذا علم ان كثير الاضلاع يكافئ ذا اربعة اضلاع واذا وصل وتر ح ا ورسم من نقطة ب خط ب ر موازيا للخط ح ا ووصل ح ر كما مر يثبت ان يكون مثلث ا ب ح مكافئا المثلث ا ر ح وحينئذ يكون مثلث ح ر و مكافئا الذى اربعة اضلاع ا ب ح و اولمكافئه وهو مخمس ا ب ح د هـ يعنى ان المثلث المذكور يكافئ ذلك الشكل الكثير الاضلاع المفروض * وقس على هذا سائر الاشكال الكثيرة الاضلاع المستقيمة لان فى هذا العمل يصير تنزيل آحاد الاضلاع مرة بعد اخرى حتى ينتهى الشكل الى مثلث

تنبيه يمكن انشاء مربع مكافئ لاى شكل مستقيم الاضلاع معلوم اذ تقدم انه يمكن تحويل المثلث الى مربع (عملى ٦) * وهذا العمل يسمى تربيع الشكل المستقيم الاضلاع

واما مسئلة تربيع الدائرة فهى طريقة انشاء المربع المكافئ لدائرة معلومة القطر

(الدعوى الحادية عشرة العملية)

طريقة انشاء مربع مساو لمجموع مربعين معلومين او للتفاضل بينهما

(شكل ١٤٧) اذا كان ا و ب ضلعى المربعين المعلومين

أولا لاجل استخراج مربع مساو لمجموعهما ينشأ خطا هـ و و هـ ح المستقيمان الغير المحدودين بان يكونا متعامدين فاذا اخذ هـ د مساويا الضلع ا و هـ ر مساويا الضلع ب ووصل د ر فهذا الخط الموصول هو ضلع المربع المطلوب * لانه يلزم من كون مثلث د هـ ر قائم الزاوية ان يكون المربع المنشأ على وتر د ر مساويا لمجموع المربعين المنشأين على ضلعى د هـ و هـ ر

وثانيا اذا اريد انشاء مربع يساوى التفاضل بينهما ترسم زاوية و هـ ح القائمة ويؤخذ هـ ر مساويا للضلع الاصغر من ضلعى ا و ب فاذا جعلت نقطة ر مركزا وببعد ر ع المساوى للضلع الاكبر يرسم قوس دائرة يقطع خط هـ ح فى نقطة ع فالمربع المنشأ على هـ ع يساوى التفاضل بين المربعين

المنشأين

المنشأين على خطى ا و ب * لانه يلزم من كون مثلث هـ ر ح قائم الزاوية ووتر ر ح مساويا لضلع ا وعمود هـ ر مساويا للضلع ب ان يكون المربع المنشأ على هـ ح يساوى التفاضل بين المربعين المنشأين على خطى ا و ب ويثبت المطلوب

(تنبيه) بهذه الطريقة يمكن انشاء مربع يكافئ مجموع مربعات قدر ما يراد * أو يكافئ التفاضل بين مجموع مربعات و بين مجموع مربعات أخر

لانه يمكن انشاء مربع يساوى مربعين وانشاء مربعين يساويان ثلاث مربعات ومنه يمكن انشاء مربع واحد وهكذا الى آخره وقد يمكن بهذه الطريقة أيضا انشاء مربع يساوى التفاضل بين مجموع مربعات و بين مجموع مربعات أخر

(الدعوى الثانية عشرة العملية)

(شكل ١٥٠) المراد انشاء مربع نسبته الى مربع ا ب ح د المفروض كنسبة خط ك الى ل

فاذا أخذ على خط هـ ر المستقيم الغير المحدود هـ و مساويا للخط ك و ر و مساويا للخط ل وجعل هـ ر قطرا وانشئ عليه نصف محيط دائرة واقيم عمود و ح من نقطة و الواقعة على هـذا القطر المنتهى الى محيط الدائرة ومن نقطة ح يرسم وترا ح ر و ح هـ ويمتد اجهة هـ و ر ويؤخذ ح ب مساويا لخط ا ب ضلع المربع المعلوم ومن نقطة ب يرسم خط ط ب موازيا لخط هـ ر فخط ح ط هو ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون ط ب و هـ ر متوازيين ان تكون نسبة ح ط : ح ب :: ح هـ : ح ر وحيث ان الاربعة المتناسبة مربعاتهم متناسبة تكون نسبة $\overline{ح ط}^{٢}$: $\overline{ح ب}^{٢}$ :: $\overline{ح هـ}^{٢}$: $\overline{ح ر}^{٢}$ ولكن مثلث هـ ر ح القائم الزاوية فيه نسبة مربع ضلع ح هـ الى مربع ضلع ح ر كنسبة سهم و هـ الى سهم و ر أو كنسبة مساويهما أى كنسبة خط ك الى خط ل وحيث ان فى هذا التناسب والذى سبق $\overline{ح هـ}^{٢}$: $\overline{ح ر}^{٢}$ مشتركة بينهما تكون نسبة

$\overline{حط}^2 : \overline{حـ}^2 :: ك : ل$ ولكن من كون حـ = اـ يقتضى ان تكون نسبة المربع المنشا على حط الى المربع المنشا على اـ كنسبة خط ك الى خط ل ويثبت المطلوب

(الدعوى الثالثة عشرة العملية)

(شكل ١٢٩) طريقة رسم شكل كثير الاضلاع على ضلع ور نظير ضلع اـ مشابه الشكل اـ حءهـ كثير الاضلاع الآخر * فاذا رسم وترا اح و اء من الشكل كثير الاضلاع المعلوم ومن نقطة و ترسم زاوية وح مساوية لزاوية ـاح ومن نقطة ر ترسم زاوية ورح مساوية لزاوية اـح فمثلث ورح الحادث من تلاقى خطى وح و رح فى نقطة ح يكون مشابه المثلث اـح وكذلك يرسم مثلث وطح على ضلع وح نظير اح مشابها للمثلث اءح ويرسم أيضا مثلث وطـ على ضلع وط نظير اء مشابه المثلث اءهـ فكثير الاضلاع ورحطـ الحادث يصير مشابه الكثير الاضلاع المفروض وهو الشكل المطلوب

لانه قد تركب من مثلثات متشابهة متحدة العدد متماثلة الوضع

(الدعوى الرابعة عشرة العملية)

اذا كان الشكلان المتشابهان معلومين وأريد انشاء شكل مشابه لهما ومساو لمجموعهما أو للتفاضل بينهما * أقول حيث ان ا و ـ هما ضلعان متناظران فيهما فاذا أنشئ المربع المكافئ لمجموع المربعين المنشئين عليهما أو للتفاضل بينهما وكان ضلعه س نظيرا لضلعى ا و ـ فعلى ما فى الدعوى التى تقدمت الشكل المنشا على هذا الضلع مشابها للشكلين المرقومين يكون هو المطلوب

لان نسبة الاشكال المتشابهة كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة وحيث ان المربع المنشا على س مساو لمجموع المربعين المرسومين على ضلعى ا و ـ أو للتفاضل بينهما يقتضى ان يكون الشكل المنشأ عليه مشابها للشكلين المعلومين مساويا لمجموعهما أو للتفاضل بينهما و يثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة عشرة العملية)

المراد انشاء شكل مشابه لشكل معلوم آخر بان تكون نسبة الشكل المطلوب الى الشكل المعلوم كنسبة مقدار م الى مقدار ه المعلومين

فاذا فرض ضلع الشكل المعلوم آ وكان نظيره فى الشكل المطلوب سـ يلزم ان تكون نسبة م الى ه كنسبة مربع آ الى مربع ـ (٢٧ مقالة ٣) فيستخرج مقدار سـ كما صرح به فى الثانية عشرة العملية ويجرى باقى العمل كما ذكر فى الدعوى الثالثة عشرة العملية ويثبت المطلوب

(الدعوى السادسة عشرة العملية)

(شكل ١٥١) طريقة اعمال شكل مشابه لشكل ك ومكافئ لشكل لـ فيستخرج م ضلع المربع المكافئ لشكل ك وكذلك يستخرج ه ضلع المربع المكافئ لشكل لـ ويستخرج سـ الرابع المتناسب لثلاثة مقادير م و ه و اـ فاذا أنشئ شكل مشابه لشكل ك على ضلع سـ نظير ضلع اـ فهذا الشكل المرسوم يكافئ شكل لـ

لانه اذا أشير الى الشكل المنشا على الضلع سـ بحرف ـ فمن تناسب مربعات اضلاع الاشكال المتشابهة تكون نسبة ك : ـ :: اـ٢ : سـ٢ ولكن من كون نسبة اـ : سـ :: م : ه او اـ٢ : سـ٢ :: م٢ : ه٢ بالعمل ولوجود النسبة المشتركة فى هذا التناسب والذى تقدم تكون ك : ـ :: م٢ : ه٢ وحيث ان م٢ = ك و ه٢ = لـ تكون نسبة ك : ـ :: ك : لـ ولتساوى المقدمين لزم تساوى التاليين ولذا يكون ـ = لـ ويثبت المطلوب من أن يكون شكل ـ مشابها ك ومكافئا لـ

(الدعوى السابعة عشرة العملية)

(شكل ١٥٢) طريقة رسم مستطيل بان يكون مجموع ضلعيه المتجاورين

مساويا لخط اب ومكافئا لمربع ح المعلوم * يرسم نصف محيط على ان
يكون خط اب قطره ويبعد اء المساوى لضلع المربع المعلوم يرسم خط
ءه موازيا للقطر المذكور فاذا أنزل من نقطة ه التى هى ملتقى الخط
الموازى بالمحيط عمود هو على ذلك القطر فخطا اب و وب يكونان ضلعى
المستطيل المطلوب يعنى مستطيل او × وب يساوى مربع هو أو مربع
اء ومن كون اء مساويا ضلع مربع ح ثبت المطلوب من أن يكون او
× وب = ح

تنبيه شرط فى امكان اجراء عمل هذه الدعوى العملية ان يكون بعد اء لا يتجاوز
نصف القطر يعنى لابد ان يكون ضلع مربع ح أصغر من نصف خط اب

(الدعوى الثامنة عشرة العملية)

(بشكل ١٥٣) طريقة اعمال مستطيل يكون التفاضل بين ضلعيه المتجاورين
مساويا بالخط اب المعلوم ومكافئا لمربع ح المفروض
يرسم محيط دائرة على أن يكون خط اب قطراله ومن نهاية هذا القطر يقام
عمود اء مساويا لضلع المربع المعلوم فاذا رسم خط ءو القاطع المار
بنقطة ء ومركز ح فخطا ءو و ءه هما الضلعان المتجاوران من
المستطيل المطلوب
أولا لان التفاضل بينهما مساو هو أو قطر اب
وثانيا لان مستطيل هء × ءو يساوى مربع اء فثبت المطلوب من أن
يكون ذلك المستطيل مكافئا لمربع ح

(الدعوى التاسعة عشرة العملية)

طريقة استخراج المقياس المشترك بين قطر المربع وضلعه ان كان بينهما مقياس
مشترك

(شكل ١٥٤) اذا كان ابحر مربعا و اح قطره فلاجل معرفة اشتمال
قطر اح على ضلع بح كم مرة يلزم ان يوضع حب على قطر اح بان تجعل
نقطة ح مركزا و بنصف قطر حب يرسم نصف دائرة ءبه فضلع حب

يشتمل عليه قطر ا ح مرة ويبقى اى كسرا كما يرى لخارج القسمة من هذا العمل الاول ١ و اى كسر فيجب تعيين هذا الكسر بضلع ب ح أو بمساويه ا ب

فيؤخذ او مساويا لكسر اى واذا وضع أيضا او على ا ب وقدر به فقسم او يشتمل عليه ضلع ا ب مرتين وأيضا يبقى كسر فلذا علم انه اذا اجرى العمل متواليا فالكسور الباقية تصغر حتى تصير غير محسوسة بل تكاد تنعدم واذن يكون ذلك العمل غير مقرون بصحة بل يصير عملا غير متناه فلذا احكم انه لامقياس مشترك بين خطى ا ح و ح ب لكن لاجرم ان اجراء العمل بواسطة الخطوط الباقية التى لاتزال على قدر واحد مع اجتناب تصغير الخطوط وتنقيصها اسهل فلقيام زاوية ا ب ح يصير خط ا ب مماسا وخط اه قاطعا مخرجا من نقطة التماس ومن ثمة كانت اى : ا ب :: ا ب : اه فلاجل تقدير اى و ا ب يمكن أن يؤخذ مكانها ا ب و اه فى العمل الثانى لكن حيث ان ا ب أو مساويه ح ى يعد خط اه مرتين ويبقى اى كسرا لخارج القسمة يكون عدد ٢ و اى وحيث لزم تعيين كسر اى بخط ا ب فاذا اخذ خط ح ى و اه مكان اى و ا ب لكون ح ى = ا ب يصير خارج القسمة فى العمل الثالث ٢ و اى كسرا فعلم انه لايزال يظهر كسر بلا انتهاء نظرا الى ذلك وعلم من هذا ان لامقياس مشترك بين قطر المربع وضلعه كما صرح به أيضا فى علم الحساب

لانه قد علم ان النسبة بينهما :: $\sqrt{2}$: ١ الا انه حاصل كسب اطلاع وافر فى هذه الدعوى بطريق الهندسة

(تنبيه) لقد ظهر انه لايمكن وجود نسبة بعدد حقيقى صحيح بين قطر المربع وضلعه الا تقريبا بواسطة الكسور المتسلسلة لخارج القسمة من العمل الاول ١ و اى كسر ومن العمل الثانى والثالث وسائر الاعمال خارج القسمة

اثنان و ا د كسر فلذا رقت تلك الكسور المتسلسلة ههنا

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

وهكذا بلا نهاية

فاذا حسبت هذه الكسور المتسلسلة الى الحد الرابع الذى فى الابتداء يصير مقدارها ١ $\frac{12}{29}$ او $\frac{41}{29}$ يعنى ان النسبة التقريبية بين قطر المربع وضلعه صارت :: ٤١ : ٢٩ وان حسبت حدود كثيرة من هذه المتسلسلة تزداد تلك النسبة تقريبا حتى تكاد تكون تحقيقية

(المقالة الرابعة)

في بيان الاشكال المستقيمة الاضلاع عموما وخصوصا في الاشكال الكثيرة الاضلاع المنتظمة ومقادير الدوائر ومساحتها

الحدود

اذا كان كثير الاضلاع متساوى الاضلاع والزوايا يسمى منتظما وعموما كل شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت أضلاعه وزواياه حتى ان المثلث المتساوى الاضلاع والمربع عد كل منهما شكلا منتظما وقيل لهذه الاشكال اشكال مضلعة منتظمة *

(الدعوى الاولى النظرية)

كل شكلين منتظمين متحدين في عدد الاضلاع يكونان متشابهين (شكل ١٥٥) مثلا اذا كان ا ب ح د ه و و ز ح ط ى ك ل مسدسين منتظمين فمجموع الزوايا من كل منهما متحد ويساوى ثمانية قوائم (مقالة ١) فتكون زاوية ز = ا حيث كانت كل واحدة منهما سدس ثمانى قوائم وأيضا زاوية ب = ح وزاوية ح = ط وهكذا الى آخره *ولانتظام كل منهما لزم أن تكون اضلاع ا ب و ب ح و ح د الخ متساوية وكذا ز ح و ح ط و ط ى الخ فيحصل تناسب ا ب : ز ح :: ب ح : ح ط :: ح د : ط ى الخ فعلى هذا صارت الاضلاع المتناظرة من هذين الشكلين متناسبة والزوايا متساوية وثبت المطلوب من أن يكونا متشابهين (حد ٢ مقالة ٣)

نتيجة كثيرا الاضلاع المتحدان في عدد الاضلاع وعموما جميع الاشكال المستقيمة الاضلاع المنتظمة المتحدة العدد تكون النسبة بين محيطيها كالنسبة بين اضلاعها المتناظرة والنسبة بين سطوحها كالنسبة بين مربعى اضلاعها المتناظرة (٢٧ مقاله ٣)

(تنبيه) تتعين زاوية الشكل المنتظم بواسطة عدد الاضلاع كما تعينت زوايا الاشكال الكثيرة الاضلاع المتساوية الزوايا

(الدعوى الثانية النظرية)

(شكل ١٥٦) كل شكل مستقيم الاضلاع منتظم يمكن رسم دائرة خارجية مارة بجميع زواياه وداخلة تماس بجميع اضلاعه

الصورة الاولى مثلا اذا كان شكل ا ب ح د ه الخ منتظما وتصورمرور محيط دائرة بثلاث نقط ا و ب و ح بان تكون نقطة ط مركزه ونزل عمود ط ى على وسط ب ح ووصل ط ا و ط د فيمكن تطبيق ذى الاربعة الاضلاع ط ى ح د الحادث على ط ى ب ا ذى الاربعة الاضلاع الآخر بان يكون ضلع ط ى مشتركا بين الشكلين المذكورين ولتساوى زاويتى ط ى ح و ط ى ب لقيامهما فينطبق ضلع ى ح على مساويه ى ب وتقع نقطة ح على نقطة ب وحيث ان ذلك الشكل منتظم تكون زاوية ى ح د = ى ب ا ويقع ح د على استقامة ضلع ب ا ومن كون ح د = ب ا توجد نقطة د فوق نقطة ا ويتساوى ذوا الاربعة الاضلاع المرقومان مع كمال الانطباق فبعد ط د يساوى أيضا ط ا ومن ثمة علم ان المحيط المار بثلاث نقط ا و ب و ح يمر أيضا بنقطة د وبمثل هذا ثبت ان محيط الدائرة الذى يمر بنقط ا و ب و ح يمر بنقطة ه وهكذا على التوالى اى يمر برؤس سائر الزوايا ومن أجل ذلك ثبت المطلوب انه يمكن رسم محيط دائرة على كل منتظم

ثانيا حيث ان اضلاع ا ب و ب ح و ح د الخ أوتار متساوية نظرا الى المحيط فتتساوى ابعادها من المركز (٨ مقالة ٢) فلذا اذا جعلت نقطة ط مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر ط ى فهذا المحيط يمر مماسا بوسط ضلع ب ح وبوسط كل من سائر اضلاع الشكل الكثير الاضلاع ومن أجل ذلك كان هذا المحيط هو المرسوم داخل كثير الاضلاع المماس بجميع اضلاعه أو يصير ذلك الشكل مرسوما على ذلك المحيط وثبت المطلوب

(تنبيه١)

(تنبيه ١) حيث صارت نقطة ط مركزا للدائرة المرسومة داخلا وخارجا فهي مركز لشكل كثير الاضلاع المنتظم وزاوية اط ب الحاصلة من احاطة نصفي القطر الواصلين الى نهايتي ضلع اب تسمى مركزية * ولتساوي أوتار اب و ب ج الخ تتساوى سائر الزوايا المركزية وكل واحدة منها تساوي خارج القسمة من تقسيم أربع قوائم على عدد اضلاع الشكل الكثير الاضلاع

(تنبيه ٢) لاجل رسم كثير اضلاع منتظم ما داخل الدائرة يقسم محيطها الى أقسام متساوية بعدد اضلاع ذلك الشكل ثم يوصل بين نقط التقسيم

(شكل ١٥٨) لانه متى تساوت الاقواس تساوت اوتار اب و ب ج و ج د الخ فتتساوي الاضلاع والزوايا من مثلثات اب ط و ب ط ج و ج ط د فلزم تساوي زوايا اب ج و ب ج د و ج د ه الخ التي هي أضعاف تلك الزوايا وبتساوي الاضلاع والزوايا من شكل اب ج د ه الخ ظهر انتظامه

(الدعوى الثالثة العملية)

طريق رسم المربع داخل الدائرة المعلومة

(شكل ١٥٧) فاذا رسم قطرا اج و ب د على ان يتقاطعا عمودين ووصل بين نهايات ا و ب و ج و د فشكل اب ج د الحادث هو المربع المطلوب * لان أوتار اب و ب ج و ج د و د ا متساوية لتساوي زوايا اه ب و ب ه ج و ج ه د و د ه ا القوائم ولوقوع زوايا ا و ب و ج و د المحيطية في نصف الدائرة صارت كل واحدة منها قائمة ولذا ثبت المطلوب من ان يكون الشكل الرقيم مربعا

(تنبيه) حيث ان مثلث ب ه ج متساوي الساقين قائم الزاوية حصل تناسب ب ج : ب ه :: $\sqrt{2}$: ١ (١١ مقالة ٣) فتبين ان نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة الى نصف القطر كنسبة جذر مربع عدد ٢ الى الواحد

(الدعوى الرابعة العملية)

طريق رسم المسدس المنتظم والمثلث المتساوى الاضلاع داخل الدائرة المعلومة

(شكل ١٥٨) لاجل حل هذه الدعوى يفرض ان اب ضلع من اضلاع المسدس المراد رسمه داخل الدائرة ويرسم نصفا قطر اط و بط فمثلث اطب الحادث يكون متساوى الاضلاع * لان زاوية اطب سدس اربع قوائم فاذا جعلت القائمة أحدا فزاوية اطب = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$ وأيضا يصير مجموع زاويتى ابط و باط الاخريين منه = (٢ — $\frac{٢}{٣}$) او $\frac{٤}{٣}$ وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان يكون مقدار كل واحدة منهما = $\frac{٢}{٣}$ فصار مثلث ابط متساوى الاضلاع لتساوى زواياه الثلاث فظهر ان ضلع المسدس المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر * فاذا وضع نصف القطر المرقوم ودور على المحيط فالاخير منه ينطبق آخره بنهاية الاول فى نقطة الابتداء وينقسم به محيط الدائرة الى ستة أقسام متساوية فاذا وصلت الاوتار حدث المسدس المطلوب

وما عدا هذا متى وصل بين كل اثنين على التوالى من رؤس زوايا مسدس ابحد هو مع ترك اخرى بينهما يحدث احه المثلث المتساوى الاضلاع

(تنبيه) حيث ان اب = بح = حط = اط فيكون شكل ابحط متوازى الاضلاع معينا (١٤ مقالة ٣) فصار $\overline{\text{اح}}^{٢}$ + $\overline{\text{بط}}^{٢}$ يعنى مجموع مربعى القطرين يساوى مجموع مربعات الاضلاع الاربعة أى ٤ $\overline{\text{اب}}^{٢}$ أو ٤ $\overline{\text{بط}}^{٢}$ * فاذا طرح من كل من هذين المتساويين مربع $\overline{\text{بط}}^{٢}$ يكون $\overline{\text{اح}}^{٢}$ = ٣ $\overline{\text{بط}}^{٢}$ فاذا وضعت هذه المتساوية فى صورة التناسب يصير $\overline{\text{اح}}^{٢}$: $\overline{\text{بط}}^{٢}$ :: ٣ : ١ أو اح : بط :: $\sqrt{}$ ٣ : ١ فلذا ظهر ان النسبة بين ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وبين نصف القطر كالنسبة بين جذر مربع عدد ٣ وبين الاحد

(الدعوى)

(الدعوى الخامسة العملية)

طريقة رسم المعشر المنتظم والمخمس المنتظم وذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم داخل الدائرة المعلومة

(شكل ١٠٩) أقول اذا قسم نصف قطر ا ع فى نقطة م على نسبة الوسط والطرفين (٤ عملى مقالة ٣) واخذ وتر ا ب مساويا القسم م ع الاكبر فهو ضلع المعشر المنتظم * فاذا دور على المحيط عشر مرات يقسم المحيط الى عشرة أقسام متساوية * لانه اذا وصل م ب تصير ا ع : ع م :: ع م : ا م بالعمل ومن كون ا ب = م ع فاذا وضع مكانه يكون ا ع : ا ب :: ا ب : ا م ولاشتراك الزاوية فى مثلثى ا ب ع و ا م ب مع تناسب الاضلاع المحيطة بها لزم ان يكون هذان المثلثان متشابهين (٢٠ مقالة ٣) ولتساوى ساقى مثلث ا ع ب فمثلث ا م ب المشابه له ايضا يكون متساوى الساقين ويكون ا ب = ب م ولكن ا ب = م ع فصار م ب = م ع فيكون مثلث ب م ع أيضا متساوى الساقين

فزاوية ا م ب الواقعة خارجة مثلث ب م ع المتساوى الساقين ضعف زاوية ع الواقعة داخله (مقالة ١) وحيث ان زاوية ا م ب = م ا ب فصار كل من زاويتى ع ا ب و ع ب ا الواقعتين على قاعدة مثلث ا ع ب ضعفا لزاوية ع الرأسية فعلم ان مجموع ثلاث زوايا المثلث المذكور خمسة أمثال زاوية ع فكانت هى خمس قائمتين أو عشر أربع قوائم فقوس ا ب يصير عشر محيط الدائرة وثبت المطلوب من أن يكون وتر ا ب هو ضلع المعشر المطلوب

(نتيجة ١) متى وصل بين كل زاويتين منه غير متجاورتين على التوالى يحصل مخمس ا ح هـ ر ط

(نتيجة ٢) متى كان ا ب ضلع المعشر و ا ل ضلع المسدس فقوس ب ل يصير ($\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{10}$) أو $\frac{1}{15}$ نظرا الى المحيط فوتر ب ل يكون ضلع كثير الاضلاع المنتظم ذى الخمسة عشر ضلعا ولاجرم ان

قوس حل هو ثلث قوس حـ

(تنبيه) متى رسم كثير الاضلاع داخل الدائرة وقسمت الاقواس الموترة لاضلاعه بقسمين متساويين ووصلت أوتار انصاف الاقواس فيحصل كثير الاضلاع عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الاول * فلذا استعمل المربع لانشاء كثير الاضلاع ذي ٨ و ١٦ و ٣٢ الخ والمسدس لذى ١٢ و ٢٤ و ٤٨ الخ والمعشر لذى ٢٠ و ٤٠ و ٨٠ الخ * وذو الخمسة عشر لذى ٣٠ و ٦٠ و ١٢٠ الخ وهكذا على التوالى

اعلم انه من سنين متعددة كان لم يمكن رسم كثير الاضلاع داخل الدائرة بطريق الهندسة والدرجة الاولى والثانية من علم الجبر الا ما قد ذكر هذا عند السلف لكنه تبين باسناد الى المهندس غوس النمساوى ذكره فى كتابه الذى طبع فى ناحية ساقسونيا سنة ألف وثمانمائة وواحد من تاريخ الميلاد ان قد أمكن رسم كثير الاضلاع ذى السبعة عشر ضلعا داخل الدائرة وعموما علم ان للشكل المنتظم ذى $2^n + 1$ من الضلع قابلية ان يرسم داخل الدائرة الا ان $2^n + 1$ يلزم ان يكون عددا أوليا فى كل حال

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ١٦٠) طريق انشاء كثير الاضلاع على الدائرة مشابها الشكل ا ب حـ د الخ الكثير الاضلاع المفروض المرسوم داخل تلك الدائرة

أقول اذا رسم خط ر ح المماس من نقطة م وسط قوس ا ب فهذا المماس يصير موازيا للضلع ا ب (١٠ مقالة ٢) وكذا اذا رسمت الخطوط المماسة من اواسط اقواس ب حـ و حـ د الخ فمن تلاقى تلك الخطوط المماسة يحصل كثير الاضلاع ر ح ط ى الخ خارج الدائرة ويكون مشابها للشكل كثير الاضلاع المعلوم المرسوم داخلها وتقع نقط ن و ت و ح الثلاثة على خط مستقيم واحد كما لا يخفى

لان فى مثلثى ن م ح و ن ح ق القائمى الزاوية وتر ن ح مشترك وضلع ن م مساو لضلع ن ق فهذان المثلثان يتساويان لتساوى الوتر والضلع فيهما

(مقالة ١) وتكون زاوية م ن ح مساوية لزاوية ح ن ق فلذا خط ن ح المستقيم يمر بنقطة ب وسط قوس م ق * وبمثل هذا يثبت ان تقع نقطة ط على استقامة خط ن ح وكذا سائر النقط ومن توازى خط ر ح لضلع ا ب وخط ح ط لضلع ب ح تساوى زاوية ر ح ط لزاوية ا ب ح (مقالة ١) وكذا زاوية ح ط ي و ب ح د وكذا باقى الزوايا فتكون زوايا الشكل المرسوم على الدائرة مساوية لزوايا الشكل المرسوم داخلها ولتوازى اضلاعهما تكون ر ح : ا ب :: ن ح : ن ر وكذلك ط ح : ب ح :: ن ح : ن ب ولوجود القسبة المشتركة تكون ر ح : ا ب :: ح ط : ب ح ولكون ا ب = ب ح يكون ر ح = ح ط * وبمثل هذا ثبت ان يكون ح ط = ط ي وكذا البواقى * فمن تساوى اضلاع الشكل المرسوم على الدائرة يقتضى ان يكون منتظما وثبت المطلوب من أن يكون مشابها للشكل المرسوم داخلها

(نتيجة ١) وبالعكس اذا كان كثير الاضلاع ر ح ط ي الخ المرسوم فوق الدائرة معلوما مفروضا وأريد ان يرسم بواسطته شكل ا ب ح د الخ كثير الاضلاع داخل الدائرة فحسبك وصل خطوط ن ر و ن ح و ن ط الخ المستقيمة من ر و ح و ط الخ رؤس زوايا كثير الاضلاع المعلوم * فاذا رسمت أوتار ا ب و ب ح و ح د الخ بين ا و ب و ح الخ نقط تقاطع محيط الدائرة بالخطوط الموصولة يحدث الشكل الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وايضا اذا وصلت أوتار م ق و ق س بين م و ق و س الخ نقط التماس يحدث الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة المشابه للكثير الاضلاع المرسوم عليها

(نتيجة ٢) كافة كثيرى الاضلاع التى يمكن رسمها داخل الدائرة ايضا يمكن ان ترسم خارجها وعكسا

(الدعوى السابعة النظرية)

مساحة كثير الاضلاع المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه فى نصف نصف قطر

الدائرة المرسومة داخله

(شكل ١٦٠) مثلا اذا كان د ح ط ب الخ كثير الاضلاع منتظما كما يرى من هذا الشكل فساحة مثلث د ى ح تكون د ح × $\frac{١}{٢}$ ى م وأيضا مساحة مثلث ى ح ط تكون ط ح × $\frac{١}{٢}$ ى ك ومن كون ى ك = ى م فساحة الحاصلين تكون (د ح + ح ط) × $\frac{١}{٢}$ ى م فاذا أجرى العمل المذكور لاجل مساحة سائر المثلثات الاخر المشتمل عليها كثير الاضلاع فساحة جميع المثلثات أو كثير الاضلاع الكامل تساوى حاصل ضرب قواعد د ح و ح ط و ط ب الخ أو محيط كثير الاضلاع × فى $\frac{١}{٢}$ ى م يعنى نصف القطر ويثبت المطلوب

(تنبيه) ى م نصف قطر الدائرة المرسومة داخل كثير الاضلاع هو عين العمود النازل من المركز على احد اضلاعه

(الدعوى الثامنة النظرية)

نسبة محيطى الاشكال الكثيرة الاضلاع المتحدة فى عدد الاضلاع المنتظمة كنسبة انصاف اقطار الدوائر المرسومة داخلها وخارجها * ونسبة سطوحها كنسبة مربعات تلك الانصاف الاقطار

(شكل ١٦١) مثلا اذا كان ا ب أحد أضلاع شكل منها ونقطة هـ مركزه فخط ا هـ هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه وعمود هـ ى النازل على ا ب هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله * وايضا اذا كان د ح ضلع كثير الاضلاع الاخر ونقطة ط مركزه فيصير ط د و ط ب نصفى قطر الدائرة الداخلة والخارجة ومن كون كل من ا و د نصف زاويتى كثير الاضلاع فهما متساويتان وكذا زاويتا ب و ح فثلثا ا ب هـ و د ح ط يتشابهان وكذا مثلثا ا ى هـ و د ط ب القائما الزاوية فصارت ا ب : د ح :: ا هـ : د ط :: ى هـ : ط ب فعلم ان نسبة محيطى الشكلين كنسبة ا هـ و د ط نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين عليهما وكنسبة ى هـ و ب ط نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين داخلهما

وحيث

وحيث كانت نسبة كثيرى الاضلاع المذكورين كنسبة مربعى ضلعى ا ب و د ح المتناظرين ثبت المطلوب من أن تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مربعى اهـ و رط نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارجهما أو كالنسبة بين مربعى ى هـ و ب ط نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين داخلهما وهو المراد

(الدعوى التاسعة الفائدة)

(شكل ١٦٢) كل خط منحن أو منكسر كثرت اضلاعه محيط بخط ام ب المحدب من نهايته الى الاخرى أطول من خط ام ب المحاط

فالمراد من المحدب هو الخط المنحنى او المنكسر الذى كثرت اضلاعه أو ماتركب منهما وهو الذى لايقطعه المستقيم الا فى نقطتين اثنين نخط ام ب اذا كان منشاريا اوكان له اجزاء متداخلة فلا يعد محدبا * لانه حينئذ يمكن ان يقطعه المستقيم فى اكثر من نقطتين واما محيط الدائرة فمحدب ولاجرم * الا ان هذه القضية لم يختص بمحيط الدائرة فقط بل تشتمل على كل خط وجدت فيه شروط التحديب التى ذكرت

أقول ان لم يكن خط ام ب أصغر من كل ماأحاطه من الخطوط فلابد أن يوجد بين تلك الخطوط المحيطة خط أصغر من كل منها فيجب ان يكون ذلك الموجود اما اصغر من خط ام ب واما مساويا له

مثلا اذا فرض خط ا وى هـ ب أصغر الخطوط المحيطة فيرسم خط ور مماسا الخط ام ب من أى جهة نخط ور المماس المرقوم يكون أصغر من خط و ى هـ ر لانه مستقيم وأقرب بعد بين النقطتين * فاذا اخذ و ر بدلا عن قسم و ى هـ ر نخط اور ب يصير أصغر من خط او ى ر ب لكن قد فرض ان او ى ر ب اصغر جميع الخطوط المحيطة فصار ذلك الفرض فاسدا لوجود ماهو اصغر منه ومن ثمة تبين ان خط ام ب اصغر من كل ماأحاطه

(شكل ١٦٣) تنبيه خط ام ب المحاط لايزال أصغر من كل ماأحاطه سواء كان مدورا كالشكل أو مماسا الخط ور ح المحيط المماس فى نقطة و أو غير مماس

به فى نقطة ما و بينهما انفتاح دائرا مادار فهو كما صرح به فى هذه الدعوى

(الدعوى العاشرة الفائدة)

فى كل دائرتين متحدتى المركز يمكن ان يرسم على محيط الصغرى منهما شكل كثير الاضلاع منتظم بشرط ان لا يلتقى بمحيط الكبرى وداخل الكبرى آخر بشرط ان لا يلتقى مع محيط الصغرى وعلى كل لاتزال اضلاع الشكل المرسوم واقعة بين محيطى الدائرتين

(شكل ١٦٤) مثلا اذا كان حا و حب نصفى قطر الدائرتين المفروضتين فيرسم خط ده المماس للمحيط الاصغر فى نقطة آ المنتهى الى المحيط الاكبر بنقطتى د و ه فعلى ما تقدم من الدعاوى العملية اذا رسم فى الدائرة الكبرى كثير اضلاع منتظم وقسمت الاقواس الموترة لاضلاعه الى أقسام متساوية ووصلت أوتارها فيحدث شكل كثير الاضلاع منتظم تضاعف عدد اضلاعه نظرا للاول فاذا اجرى العمل على المنوال المحرر متواليا يحدث قوس أصغر من قوس دبه فاذا سمى هذا القوس الاصغر مبن ووسطه ب ولبعد وتر من عن المركز من وتر ده ظهر ان كثير الاضلاع المنتظم الذى ضلعه من لا يلتقى بمحيط الدائرة التى نصف قطرها حا وكذا يجرى على الدائرة الصغرى فاذا وصل حم و حن فيتقاطعان بمماس ده فى نقطتى ك و ل فيصير كل ضلع كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه لكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذى ضلعه من

وحيث ان خط حك أصغر من خط حم ظهر ان كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة الصغرى وضلعه كل لا يلاقى محيط الدائرة الكبرى فلذا علم انه اذا أجرى العمل كما تقدم يمكن ان يرسم داخل الدائرة الكبرى شكل كثير الاضلاع منتظم بان يكون محيطه بين محيطى الدائرتين ويرسم آخر مشابه له على الدائرة الصغرى كما لا يخفى

تنبيه يمكن ان يرسم جزء من كثير الاضلاع المنتظم داخل اكبر قطاعى ودر و طحح وآخر مشابها له على الاصغر بان يكون هذان الجزآن محاطين بين

المحيطين وفيه يكتفى بتقسيم قوس و ــ ر الى أقسام ٢ و ٤ و٨ و١٦ الخ المتساوية متوالية حتى يصير القسم منه اصغر من قوس ى ــ هـ وفى هذا الباب قسم المنتظم يطلق على الشكل الحاصل من احاطة نصفى قطر واوتار متساوية مرسومة من نهاية قوس ور الى نهايته الاخرى وسميت تلك الاوتار المتساوية كلها اطرافا او اضلاعا قسم المنتظم المرقوم هذا وان وجدت فيه خواص كثير الاضلاع المنتظم وهى تساوى الاضلاع والزوايا وامكان رسم محيط الدائرة داخله وخارجه لكن لا يطلق عليه انه قسم كثير الاضلاع الا اذا اشتمل محيط الدائرة على قوسه اشتمالا تاما

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

(شكل ١٦٥) النسبة بين محيطى الدوائر كالنسبة بين انصاف أقطارها والنسبة بين سطوحها كالنسبة بين مربعات أنصاف أقطارها

اقتصارا للافادة يشار الى محيط الدائرة التى نصف قطرها حا بمحيط حا والى التى نصف قطرها طــ بمحيط طــ فعلى منطوق هذه الدعوى تصير نسبة

محيط حا : محيط طــ :: حا : طــ

لانه ان لم يكن كذلك لكان الرابع المتناسب اكبر او اصغر من محيط طــ مثلا اذا فرض انه اصغر منه بان تكون حا : طــ :: محيط حا : محيط طى فاذا رسم كثير الاضلاع المنتظم هـ ورك لـ هـ داخل دائرة طــ بان لا يتقاطع بمحيط دائرة طى وأيضا يرسم كثير اضلاع آخر مق ع سـ ــ م مشابها له داخل دائرة حا فتكون النسبة بين مجموعى اضلاع هذين المنتظمين كالنسبة بين حا و طــ نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين عليهما وذلك للتشابه بينهما اعنى ان تكون مق سـ ــ م : هـ ورك هـ :: حا : طــ لكن حيث فرضت حا : طــ :: محيط حا : محيط طى ولتساوى النسب فى هذين التناسبين تكون مق سـ ــ م : هـ ورك هـ :: محيط حا : محيط طى وهذا خلاف * لانه يلزم من كون مجموع اضلاع مق سـ ــ م أصغر من محيط حا المرسوم عليه ان يكون مجموع هـ ورك هـ

ايضاً أصغر من محيط ط ى ومستحيل ان يكون المحيط أصغر من المحاط فلذا لايمكن ان تكون نسبة حا الى طـ كنسبة محيط حا الى محيط أصغر من محيط طـ كما صرح به

وكذا لايمكن ان تكون نسبة حا : طـ :: محيط حا : محيط أكبر من محيط طـ * لانه اذا جعلت النسبة عكسية وكانت نسبة طـ الى حا كنسبة محيط أكبر من محيط طـ الى محيط حا أو كنسبة محيط طـ الى محيط أصغر من محيط حا كذلك يكون عين ماصرح به ومن ثمة لايمكن أن تكون نسبة نصف القطر الاول الى نصف القطر الثانى الا كنسبة المحيط المرسوم بنصف القطر الاول الى المحيط المرسوم بنصف القطر الثانى ولامحالة لماثبت فى الشطر الاول من هذه الدعوى ومن أجل ذلك استحال ان يكون الحد الرابع من تناسب حا : طـ :: محيط حا : سـ أكبر أو أصغر من محيط طـ وثبت المطلوب من ان تكون نسبة المحيط الى المحيط كنسبة نصف القطر الى نصف القطر وحيث ان الشطر الثانى من هذه الدعوى اثباته عين الاول وكذا النتيجة الآتية حلها واثباتها فلا حاجة لتفصيل آخر فى هذا الباب

نتيجة (شكل ١٦٦) النسبة بين قوسى اـ و ده المتشابهين كالنسبة بين نصفى قطرى اح و دط والنسبة بين قطاعى احـ و دطه المتشابهين كنسبة مربعيهما

لانه من تشابه القوسين يلزم ان تكون زاوية ح مساوية لزاوية ط (حد ٣ مقالة ٣) فنسبة زاوية ح الى أربع قوائم كنسبة قوس اـ الى محيط اح الكامل (١٧ مقالة ٢) وأيضاً نسبة زاوية ط الى أربع قوائم كنسبة قوس ده الى محيط طى فعلم ان النسبة بين قوسى اـ و ده كالنسبة بين محيطيهما وعلى ماصرح به آنفاً النسبة بين المحيطين كالنسبة بين نصفى قطرى اح و دط

فظهر ان نسبة قوس اـ : قوس ده :: اح : دط

وبمثل هذا يثبت ان النسبة بين قطاعى احـ و دطه كالنسبة بين الدائرتين

الكاملتين * وحيث ان النسبة بين الدائرتين كالنسبة بين مربعى نصفى القطرين صارت نسبة قطاع اح : قطاع دهط :: $\overline{اح}^{2}$: $\overline{دط}^{2}$

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب محيطها بنصف نصف قطرها

(شكل ١٦٧) فاختصارا للافادة اذا أشير الى مساحة الدائرة التى نصف قطرها اح بمساحة اح ومحيطها بمحيط اح فعلى منطوق الدعوى مساحة اح = $\frac{1}{2}$ اح × محيط اح * لانه ان لم يكن حاصل $\frac{1}{2}$ اح × محيط اح مساحة للدائرة التى نصف قطرها اح يلزم ان تكون مساحة لدائرة أصغر أو أكبر من تلك الدائرة

أولا لو فرض انه مساو لمساحة دائرة أكبر منها مثلا وكان $\frac{1}{2}$ اح × محيط اح = مساحة حب أعنى دائرة نصف قطرها حب فاذا رسم كثير الاضلاع دهور الخ المنتظم على محيط اح بان لا يتقاطع بمحيط حب فمساحة ذلك المنتظم تساوى حاصل ضرب مجموع اضلاعه ده + هو + ور الخ بمقدار $\frac{1}{2}$ اح لكن حيث ان كثير الاضلاع أحاط بمحيط الدائرة التى رسم عليها من كل جانب وقد تقدم ان كل محيط أكبر من كل محاط فمساحة كثير الاضلاع دهور الخ أكبر من حاصل $\frac{1}{2}$ اح × محيط اح الذى فرض انه مساو لمساحة الدائرة التى نصف قطرها حب فلزم أن يكون كثير الاضلاع المرقوم أكبر من الدائرة التى احاطت به وهو محال فلذا حاصل $\frac{1}{2}$ اح × محيط اح ثبت انه لا يكون أعظم من مساحة اح يعنى لا يكون حاصل ضرب محيط الدائرة بنصف نصف قطرها أكبر من مساحتها كما لا يخفى

ثانيا لا يمكن أن يكون $\frac{1}{2}$ حب × محيط حب مساحة لدائرة أصغر منها اختصارا تجعل دائرة حب هى المفروضة

فان قيل يمكن أن يكون $\frac{1}{2}$ حب × محيط حب = مساحة اح فيجرى العمل على ما تقدم ويرسم كثير الاضلاع دهور الخ المنتظم فمساحته حاصل ضرب (ده + هو + ور + الخ) × $\frac{1}{2}$ اح لكن حيث ان مجموع

اضلاع ده + هو + ور + الخ أصغر من محيط حـب المحيط به يلزم ان تكون مساحة كثير الاضلاع أصغر من حاصل $\frac{1}{2}$ حا × محيط حـب وأيضا يجب ان تكون أصغر جدا من مقدار $\frac{1}{2}$ حـب × محيط حـب واذ فرض انه مساو لمساحة الدائرة التي نصف قطرها حا فعلى هذا يلزم ان يكون كثير الاضلاع أصغر من الدائرة التي أحاط بها وهذا باطل محض ومن ثمة تحقق ان حاصل ضرب محيط دائرة في نصف نصف قطرها لا يكون مساويا لمساحة دائرة أصغر منها فعلم ان حاصل ضرب محيط الدائرة بنصف نصف قطرها يساوي مساحتها قطعا وثبت المطلوب

(نتيجة ١) (شكل ١٦٨) مساحة قطاع الدائرة مساوية لحاصل ضرب قوسه بنصف نصف قطره

لان نسبة قطاع اـح الى الدائرة الكاملة كنسبة قوس امـب الى المحيط اـد الكامل (١٧ مقالة ٢) أو كنسبة قوس امـب × $\frac{1}{2}$ حا الى محيط اـد × $\frac{1}{2}$ اح وحيث ان مساحة الدائرة = محيط اـد × $\frac{1}{2}$ اح تبين ان مساحة قطاع اـح أيضا = امـب × $\frac{1}{2}$ اح

(نتيجة ٢) اذا رمز الى محيط الدائرة التي قطرها واحد بحرف ط ولوحظ ان نسبة المحيطين كنسبة نصفي قطريهما أو قطريهما فقد يمكن وضع ما سيأتي من التناسب اعني نسبة قطر ١ الى محيطه ط كنسبة قطر ٢ حا الى المحيط الدائرة التي نصف قطرها اح

يعني (شكل ١٦٥) ١ : ط :: ٢ حا : محيط حا فعلى هذا محيط حا = ٢ ط × حا = ٢ ط × حا فاذا ضرب كل من هذين المتساويين في $\frac{1}{2}$ حا يصير محيط حا × $\frac{1}{2}$ حا = ط × $\overline{\text{حا}}^{2}$ أو مساحة حا = ط × $\overline{\text{حا}}^{2}$ فلذا ظهر ان تكون مساحة الدائرة مساوية لمربع نصف قطرها مضروبا في عدد ط وهو محيط الدائرة التي قطرها واحد وتكون مساوية لحاصل ضرب مربع نصف القطر فيما بين القطر والمحيط من النسبة كما لا يخفى

وكذلك مساحة الدائرة التى نصف قطرها وب $= \text{ط} \times \text{وب}^{٢}$ * لكن
حيث ان النسبة بين مقدارى $\text{ط} \times \text{اح}^{٢}$ و $\text{ط} \times \text{وب}^{٢}$ كنسبة $\text{اح}^{٢}$ الى
$\text{وب}^{٢}$ صارت $\text{ط} \times \text{اح}^{٢} : \text{ط} \times \text{وب}^{٢} :: \text{اح}^{٢} : \text{وب}^{٢}$ فنظرا لهذا التناسب تبين أن النسبة بين مساحة الدوائر كنسبة مربعات أنصاف أقطارها وفيه تصديق كاف وتوافق شاف للدعوى التى تقدمت

تنبيه مسئلة تربيع الدائرة كناية عن اعمال مربع مكافئ لدائرة نصف قطرها معلوم وقد تبين ذلك ههنا وثبت ان مساحة الدائرة تكافئ المستطيل الحاصل من ضرب محيطها بنصف نصف قطرها ولا جرم انه يمكن تحويل هذا المستطيل الى مربع باستخراج الوسط المتناسب بين البعدين المرقومين (٦مقالة ٣) فعلم ان مسئلة تربيع الدائرة لا تتوقف الا على استخراج مقدار محيط الدائرة المعلومة القطر فقط ففى وجود النسبة بين نصف القطر أو القطر وبين المحيط كفاية لاستخراج ذلك

الى الآن لم يمكن استخراج هذه النسبة على طريق التحقيق واغا صار استخراجها على سبيل التقريب ولكن بطريق حساب المتواليات والكسور المتسلسلة صارت تلك النسبة فى اقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت النسبة التحقيقية فلا ثمرة فيها وقبل ان يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان كان المهندسون المتقدمون يصرفون الاذهان ما استطاعوا فى حل هذه المسئلة والآن صارت فى حيز الاهمال ولكن لاجل تدريب اذهان المبتدئين وتوسيع ميادين افكارهم اجتهد من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشميد فاظهر واثبت ان النسبة بين محيط الدائرة وقطرها هى $٣\frac{١٠}{٧٠}$ او $٣\frac{١٠}{٧١}$ يعنى $٣\frac{١}{٧}$ أو $\frac{٢٢}{٧}$ وهو ما رمزنا له بحرف ط وهو محيط الدائرة التى قطرها واحد وحيث ان اول كسر من هذين الكسرين اسهل ما يكون صار استعماله جاريا * ومن المتقدمين مهندس يسمى مسيوس استخرج مقدارا لهذه النسبة

اشد قرباً مما ذكروهو $\frac{355}{113}$ وبالجملة استخرج بمعرفة مهندسي الخلف مقدار ط بطريق الكسور الاعشارية وقدموها الى درجة التقريب ما استطاعوا حتى وصلوا الى هذه الاعداد

٣٫١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢ وقدموا هذا الكسر الى خانة المائة والعشرين وخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التي تقدمت الى هذه الدرجة حصل بها التقريب الكلي كما لا يخفى ولا جرم ان في استخراج جذر العدد الاصم لم يعلم اكثر مما ذكر حتى ان حضرة علي رضي الله تعالى عنه وكرم الله تعالى وجهه حين سئل عن جذر العدد الاصم اهو موجود ام لا فقال لا يعلم جذر الاصم الاهو * وقال بعضهم ان هذا الكلام لم يصدر عن علي رضي الله تعالى عنه حيث ان جذر الاصم لا وجود له حتى ان عليا رضي الله تعالى عنه يقول ان الله تعالى يعلمه وعلى هذا الوجه يعلم ان هذا الكلام لم ينقل عن علي ولا عن غيره من أهل التوحيد لانه محض كفر لاسناد الجهل المركب له تعالى وتنزه مولانا عن كل وصف لا يليق به وأما حضرة قبوجقلي زاده محمد عاطف أفندي أحد شراح الكتاب المشهور بخلاصة الحساب تاليف حضرة السيد بهاء الدين العاملي فقال ان هذا الكلام يحتمل انه عن علي رضي الله تعالى عنه وانه يمكن تاويله بان يقال لا يعلم أحد جذر الاصم أهو موجود أم لا الاهو * وبهذا التوجيه لا كفر ولا اعتراض * وقال حضرة الحبر الا كبر مترجم اصل هذا الكتاب من غير تاويل ليس في كلام علي كفر ولا اعتراض لان الكسور المتسلسلة كلما سيرت على التوالي تكون في منزلة التقرب من التحقيق وحيث ان لا طاقة لبشر ان يصل الى نهاية الكسور ولو بذل غاية جهده والاشياء التي لا منتهى لها دين علمه تعالى وكل ما كان مخصوصا بعلمه تعالى ولا قدرة لبشر ان يصل الى غايته فهو مفوض له تعالى وباب الاعتراض مسدود كما لا يخفى على أولي الالباب

(الدعوى الثالثة عشرة العملية)

طريق استخراج سطح كثير الاضلاع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وخارجها

عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الكثير الاضلاع المرسومين داخل الدائرة وخارجها المتشابهين المعلومين

(شكل ١٦٩) مثلا اذا كان ا ــ ضلع كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وكان هـ و الموازى له ضلع كثير الاضلاع المرسوم خارجها المشابه له وكانت نقطة ح مركز تلك الدائرة ووصل وتر ام وخطا ال و ــ ك المماسين فوتر ام يكون ضلع كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة المضاعف الاضلاع عددا و لك الذى هو ضعف لم هو ضلع كثير الاضلاع المشابه له المرسوم على تلك الدائرة فاذا علمت ذلك يمكن اجراء العمل كما ذكر فى زاويه ا ح م على سائر الزوايا الاخر التى تساويها وفى هذا الاجراء يكتفى بما صرح به فى تلك الزاوية والنسبة بين ما اشتملت عليه هذه الزاوية من المثلثات كالتى بين كثيرى الاضلاع التى تكون تلك المثلثات أقسامها

فاذا سميت مساحة كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الذى ضلعه ا ــ مساحة ا ومساحة كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة مشابها له مساحة ــ ومساحة الذى ضلعه ام المرسوم داخل الدائرة مساحة آ ومساحة المشابه له المرسوم على الدائرة با فعلى منطوق الدعوى حيث ان ا و ــ معلومان وجب استخراج آ و با

أولا لاشتراك رأس مثلثى ا ح د و ا ح م فى نقطة ا واتحاد الارتفاع تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ح د و ح م وايضا النسبة بين هذين المثلثين كالنسبة بين كثيرى الاضلاع ا و آ اللذين كان ذانك المثلثان قسميهما فلذا صارت ا : آ :: ح د : ح م وكذلك لاشتراك م رأس مثلثى ح م ا و ح م هـ تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ح ا و ح هـ وايضا نسبة هذين المثلثين كالنسبة بين كثيرى الاضلاع ا و ــ فلذا كانت آ : ــ :: ح ا : ح هـ لكن لتوازى خطى ا د و م هـ تكون ح د : ح م :: ح ا : ح هـ ولتساوى النسب فى هذا وفى التناسب الذى سلف تكون ا : آ :: آ : ــ وحيث ان آ احد كثيرى الاضلاع المطلوبين وانه وسط

متناسب بين ا و ب وبهذا صار آ = √(ا × ب) وتعين
ثانيا لاشتراك ارتفاع حم في مثلثي حلم و حله تكون نسبتهما
كنسبة قاعدتيهما لم و له وحيث نصفت زاوية م ح ه بخط
حل تكون لم : له :: حم : حه :: حء : حا ::
ا : آ فلذا صار حلم : حله :: ا : آ وبطريق التركيب أيضا
تكون حلم : حلم + حله أو حمه :: ا : ا + آ *
لكن نسبة حملا أو ٢ حمل و حمه كنسبة با و ب اللذين
كان ذانك المثلثان قسميهما ومن ثمة كانت با : ب :: ٢ا :
ا + آ * وإذن تعين مقدار آ وبهذا التناسب يتعين أيضا مقدار
با فلذا با = (٢ا × ب) / (ا + آ) ومن ثمة صار استخراج آ و با كثيري الاضلاع
اللذين عدد اضلاعهما مضاعف بواسطة كثيري الاضلاع ا و ب المعلومين
على أسهل طريق

(الدعوى الرابعة عشرة العملية)

طريق استخراج النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطرها اذا فرض ان نصف
قطرها = ١ يكون ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة = √٢
وحيث ان ضلع المربع المرسوم على الدائرة مساو لقطرها يصير = ٢ فعلى
هذا مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة = ٢ ومساحة المربع المرسوم
عليها = ٤ فلذا ا = ٢ و ب = ٤ فعلى ما ذكر في الدعوى
العملية المتقدمة مساحة المثمن المرسوم داخل الدائرة المسمى آ =
√(٢×٤) = √٨ = ٢و٨٢٨٤٢٧١ ومساحة المثمن المرسوم
على الدائرة المفروض با = (٢×٢×٤) / (٢+√٨) = ١٦ / (٢+√٨) = ٣و٣١٣٧٠٨٥
وحيث ان مساحة المثمن المرسوم داخل الدائرة وخارجها معلومة توجد
بواسطتهما وتعلم مساحة كل من كثير الاضلاع المضاعف عدد اضلاعه الى ذا
الستة عشر ضلعا فصاعدا * ولاجل اجراء العمل على النسق المذكور يفرض
مجددا ان مساحة ا = ٢و٨٢٨٤٢٧١ و ب = ٣و٣١٣٧٠٨٥ فعلى

ماصرح به فى الدعوى السابقة صارت $\text{اَ} = \sqrt{\text{ب} \times \text{ا}} = ٣\text{و}٠٦١٤٦٧٤$ و $\text{بَا} = \frac{١٢ \times \text{ب}}{١ + \text{اَ}} = ٣\text{و}١٨٢٥٩٧٩$ وعلى هذا المنوال يصير اجراء العمل فبواسطة ذى الستة عشر ضلعا يستخرج ذو الاثنين والثلاثين وكذا البواقى حتى لا يبقى فرق بين الشكل المرسوم داخل الدائرة وخارجها اصلا والمراد من هذا ان الشكل الكثير الاضلاع الداخل والخارج تصير اضلاعه غير محسوسة ابدا ويصير الشكلان المرقومان معدومين اصلا اعنى اتحادهما بالدائرة فبعد اجراء العمل حسب الطاقة يعلم من هذا الكلام ان محيط الدائرة عبارة عن شكل كثير الاضلاع منتظم كثر عدد اضلاعه حتى صار كل ضلع منه غير محسوس ومن ثمة صارت مساحة الدائرة تؤخذ كمساحة كثير الاضلاع المنتظم اعنى حاصل ضرب نصف نصف القطر بالمحيط كما فعل بمساحة الشكل المنتظم وانما يجرى العمل اقل ما يكون الى المحل الذى تترك فيه الكسور ومادامت الخانات توافق العمل ففى مثالنا هذا يجرى العمل على الترتيب الاعشارى الى سابع خانة يعنى يجرى العمل مادامت الخانات موافقة للعمل ومايؤخذ عند المنتهى التقريبى يكون مساحة الدائرة وبذلك حكم ان مساحة الدائرة صارت وسطا متناسبا بين الداخل والخارج والفرق بينهما غير محسوس ولم يقع بينهما مخالفة فى مواضع كثيرة من الاعشارى ومن ثمة ظهر عدم المخالفة بين اقسامهما لان العبرة بالخانات الواقعة فى صدر الاعشارى فصارت تقديم الكسور الاعشارية الى سابع خانة والخانات المتوافقة هاهى

عدد الاضلاع	مسائح كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة	مسائح كثير الاضلاع المرسوم خارج الدائرة
٤ ..	٢و٠٠٠٠٠٠٠	٤و٠٠٠٠٠٠٠
٨ ..	٢و٨٢٨٤٢٧١	٣و٣١٣٧٠٨٥
١٦ ..	٣و٠٦١٤٦٧٤	٣و١٨٢٥٩٧٩
٣٢ ..	٣و١٢١٤٤٥١	٣و١٥١٧٢٤٩

٠٠٦٤	٣و١٣٦٥٤٨٩	٣و١٤٤١١٨٤
٠٠١٢٨	٣و١٤٠٣٣١١	٣و١٤٢٢٢٣٦
٠٠٢٥٦	٣و١٤١٢٧٧٢	٣و١٤١٧٥٠٤
٠٠٥١٢	٣و١٤١٥١٣٨	٣و١٤١٦٣٢١
٠١٠٢٤	٣و١٤١٥٧٢٩	٣و١٤١٦٠٢٥
٠٢٠٤٨	٣و١٤١٥٨٧٧	٣و١٤١٥٩٥١
٠٤٠٩٦	٣و١٤١٥٩١٤	٣و١٤١٥٩٣٣
٠٨١٩٢	٣و١٤١٥٩٢٣	٣و١٤١٥٩٢٨
١٦٣٨٤	٣و١٤١٥٩٢٥	٣و١٤١٥٩٢٧
٣٢٧٦٨	٣و١٤١٥٩٢٦	٣و١٤١٥٩٢٦

فظهر من الحساب المرقوم ان مساحة الدائرة = ٣و١٤١٥٩٢٦ فحيث صار تقديم الكسر الاعشارى الى سابع خانة وترك البواقى حيث الكسور بزيادة ترقيم خانة ليكون حاصل الحساب مقرونا بالصحة وواصلا الى الحقيقة عند منتهى الخانات اذلا يكون للشبهة مجال فى صحة الحساب

وحيث صارت مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب نصفه نصف قطرها بالمحيط تبين انه اذا كان نصف قطرها واحدا فنصف المحيط = ٣و١٤١٥٩٢٦ وان كان قطرها واحدا فالمحيط = ٣و١٤١٥٩٢٦ فظهران مقدار ط الذى هو اقرب نسبة القطر الى المحيط كما سبق = ٣و١٤١٥٩٢٦ وثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة عشرة الفائدة)

(شكل ١٧٠) اذا كان ضلع حـهـ المساوى لضلع حـد فى مثلث دحـهـ المتساوى الساقين المشترك فى رأس حـ بمثلث حـ ا ب وسطا متناسبا بين ضلعى حـ ا و حـ ب فالمثلثان المرقومان يكونان متكافئين وما عدا هذا اذا كانت زاوية حـ ا ب قائمة فعمود حـ و النازل على قاعدة المتساوى الساقين يكون وسطا متناسبا بين ضلع ا حـ وبين نصف مجموع ضلعى ا حـ

و حـ ب

اولا حيث ان زاوية حـ مشتركة تكون نسبة مثلث ا ب جـ الى مثلث د حـ هـ متساوي الساقين كنسبة مستطيل ا حـ × حـ ب الى مستطيل د حـ × حـ هـ او كنسبة $\overline{\text{د حـ}}^{2}$ (٣٤ مقالة ٣) وفي هذه الاربعة المتناسبة متى كان $\overline{\text{د حـ}}^{2}$ = ا حـ × حـ ب اعني ان يكون د حـ وسطا متناسبا بين ضلعي ا حـ و حـ ب تبين ان يكون مثلثا ا ب حـ و د حـ هـ متكافئين لأن تساوي حدى النسبة الثانية يستلزم تساوي حدى النسبة الاولى لما علم من خواص التناسب

ثانيا يلزم من تقسيم عمود حـ و لزاوية ا حـ ب الى قسمين متساويين ان تكون ا و : و ب :: ا حـ : حـ ب (١٧ مقالة ٣) وايضا بطريق التركيب تكون ا و : ا و + و ب أو ا ب :: ا حـ : ا حـ + حـ ب لكن حيث ان نسبة ا و الى ا ب كنسبة مثلث ا حـ و الى مثلث ا حـ ب أو ٢ حـ د و ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين صارت ا حـ : ا حـ + حـ ب :: مثلث ا حـ و : ٢ حـ د و وان كانت زاوية ا قائمة فمن تشابه مثلثي ا حـ و و حـ د و تكون ا حـ و : حـ د و :: $\overline{\text{ا حـ}}^{2}$: $\overline{\text{حـ و}}^{2}$ أو ا حـ و : ٢ حـ د و :: $\overline{\text{ا حـ}}^{2}$: ٢ $\overline{\text{حـ و}}^{2}$ ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين ايضا تكون $\overline{\text{ا حـ}}^{2}$: ٢ $\overline{\text{حـ و}}^{2}$ :: ا حـ : ا حـ + حـ ب فاذا ضربت الثانية من هذا التناسب في مقدار ا حـ يتساوى مقدماها فيتساوى تالياها ايضا فلذا صار ٢ $\overline{\text{حـ و}}^{2}$ = ا حـ × (ا حـ + حـ ب) أو $\overline{\text{حـ و}}^{2}$ = ا حـ × $\left(\frac{\text{ا حـ + حـ ب}}{٢}\right)$

فظهر من هذه المساواة انه متى كانت زاوية ا قائمة يكون عمود حـ و وسطا متناسبا بين ضلع ا حـ ونصف مجموع ضلعي ا حـ و حـ ب وبه ثبت المطلوب

(الدعوى السادسة عشرة العملية)

طريق استنباط دائرة من شكل كثير الاضلاع منتظم معلوم قدر ما يراد بان يكون التفاوت بينهما قليلا

(شكل ١٧١) مثلا اذا كان ب م ق ف مربعا معلوما ونزل عمود ح ا من مركز ح على ضلع م ب ويوصل ح ب * فالدائرة المرسومة بنصف قطر ح ا هي الدائرة المرسومة داخل المربع والمرسومة بنصف قطر ح ب هي المرسومة عليه

فالدائرة الاولى اصغر من المربع والثانية اكبر منه فيجب تضييق هذه الحدود فيؤخذ ح ه و ح د متساويين بان يكون كل منهما وسطا متناسبا بين ح ا و ح ب فاذا وصل د ه فمثلث ح د ه الحادث المتساوى الساقين يكافى مثلث ح ا ب وهكذا اذا اجرى العمل على المثلثات الثمانية المركب منها المربع يحدث مثمن منتظم يكافى مربع ب م ق ف والدائرة المرسومة بنصف قطر ح و الوسط المتناسب بين مقدارى ح ا و $\frac{ح ا + ح ب}{٢}$ هي الدائرة المرسومة داخل المثمن المرقوم والمرسومة بنصف قطر ح د هي المرسومة على المثمن المذكور فالدائرة الاولى اصغر من المربع والثانية اكبر منه

فعلى المنوال المحرر اذا تحول مثلث ح د و قائم الزاوية الى مثلث متساوى الساقين مكافى له فحينئذ يحدث الشكل المنتظم ذو الستة عشر ضلعا مكافيا للمربع المفروض ولا تزال الدائرة المرسومة داخله اصغر من المربع المرقوم والمرسومة عليه اكبر

وهكذا حتى تصير النسبة التى بين نصف قطر الدائرة الداخلة والخارجة جزأ غير محسوس وحيث يمكن اجراء العمل على التوالى كما ذكر حتى يوصل به الى درجة المساواة بين نصفى القطر من الداخلة والخارجة فيصير ما كان مرسوما داخل الدائرة وخارجها مكافيا للمربع المعلوم

(تنبيه) يذكر فى هذا المحل ما ينتج وينحصر من البحث والتحرى على التوالى عن تقرب انصاف الاقطار

مثلا اذا كانت ا نصف قطر الدائرة المرسومة داخل احد المنتظمين المستخرجين و ب نصف قطر الدائرة المرسومة عليه وكانت آ و بَ نصفي قطري الدائرتين المرسومتين داخل وخارج كثير الاضلاع المضاعف الذي يلي الاولين فعلى ما ثبت آنفا علم ان مقدار بَ يكون وسطا متناسبا بين ا و ب ومقدار آ ايضا يكون وسطا متناسبا بين مقداري ا و (ا + ب)/٢ ومن ثمة يكون بَ = √(ا × ب) و آ = √(ا × (ا + ب)/٢) فعلى هذا متى علم مقدار ا و ب نصفي قطري كثير الاضلاع يعلم آ و بَ نصفا قطر كثير الاضلاع اللذان يليان الاولين بسهولة * فاذا اجرى العمل على الوجه المشروح حتى يصير الفرق بين نصفي القطر غير محسوس فيصير كل واحد منهما نصف قطر الدائرة المكافئة للمربع أو كثير الاضلاع المفروض

لكن اجراء هذه الطريقة بالخطا اسهل * لانه عبارة عن استخراج الوسط المتناسب على التوالي بين خطين معلومين ولا جرم اعماله بالاعداد أفيد

واستخراج نسبة القطر الى المحيط بطريق أصول الهندسة اسهل من ذلك كله مثلا اذا كان ضلع المربع = ٢ يكون حـ ا نصف القطر الاول المرسوم داخلا = ١ ويكون حـ ب نصف القطر الاول المرسوم خارجا = √٢ او ١و٤١٤٢١٣٦ فمتى كان ا = ١ و ب = ١و٤١٤٢١٣٦ فيكون بَ = ١و١٨٩٢٠٧١ و آ = ١و٠٩٨٦٨٤١

فعلى ما صرح به في أصول المتوالية تستعمل هذه الاعداد في استخراج ما سيأتي من الاعداد الآتية وههنا رقت نتائج الحساب الى سابع وثامن خانة من الارقام بواسطة جداول اللغارتمة العادية

انصاف اقطار الدوائر المرسومة خارجا	انصاف اقطار الدوائر المرسومة داخلا
١و٤١٤٢١٣٦	١و٠٠٠٠٠٠٠
١و١٨٩٢٠٧١	١و٠٩٨٦٨٤١
١و١٢١٠٨٦٣	١و١٤٣٠٥٠٠

١٢٦٥٦٣٩ و ١ —————— ١٣٢٠١٤٩ و ١

١٢٧٩٢٥٧ و ١ —————— ١٢٩٢٨٦٢ و ١

١٢٨٢٦٥٧ و ١ —————— ١٢٨٦٠٦٣ و ١

نظرا لهذا الحال تساوت واتحدت انصاف الاقطار الاول من الطرفين خصوصا اذا أخذ الوسط المتناسب بالمناسبة العددية مكان ما يؤخذ بالمناسبة الهندسية فبهذه الطريقة تسهل عملية الحساب وان وجد فيهما بعض فرق فى اواخر الخانات فانه جزء غير محسوس وقد رقت ههنا نتائج تلك العملية

١٢٨٤٣٦٠ و ١ —————— ١٢٨٣٥٠٨ و ١

١٢٨٣٩٣٤ و ١ —————— ١٢٨٣٧٢١ و ١

١٢٨٣٨٢٧ و ١ —————— ١٢٨٣٧٧٤ و ١

١٢٨٣٨٠١ و ١ —————— ١٢٨٣٧٨٧ و ١

١٢٨٣٧٩٤ و ١ —————— ١٢٨٣٧٩١ و ١

١٢٨٣٧٩٢ و ١ —————— ١٢٨٣٧٩٢ و ١

فهذا العدد ١٢٨٣٧٩٢ و ١ هو اقرب نسبة لنصف قطر الدائرة التى تساوى مساحة المربع الذى ضلعه اثنان وبذلك صار وجود نسبة القطر الى المحيط اسهل * وحيث تقدم ان مساحة الدائرة تساوى تربيع نصف القطر مضروبا فى عدد ط فاذا قسمت مساحة ٤ على مربع هذا العدد ١٢٨٣٧٩٢ و ١ يخرج مقدار ط فاذا حسب ظهر هذا الرقم الخ ١٤١٥٩٢٦ و ٣ وهو عين ما قد وجد بالوجه الآخر فيما تقدم *

ملحقات المقالة الرابعة

حد ١ بين المقادير المتحدة الجنس يقال للاكبر اعظمها ويقال للاصغر اصغرها فقطر الدائرة هو اعظم خط واصل بين نقطتى محيط الدائرة والعمود هو اصغر خط واصل بين نقطة مفروضة وخط معلوم

حد ٢ الاشكال المتساوية المحيط جما تسمى متساوية الاطراف

(الدعوى الاولى النظرية)

اعظم المثلثات المتحدة القاعدة المتساوية الاطراف ما كان ضلعاه سوى القاعدة متساويين اعنى ان ما رسم فوق القاعدة متساوى الساقين اعظم

(شكل ١٧٢) مثلا اذا كان اج = جب و ام + مب = اج + جب فمثلث اجب المتساوى الساقين اكبر من مثلث امب الذى قاعدته عين قاعدته واطرافه مساوية لاطرافه فاذا جعلت نقطة ج مركزا ورسم محيط بنصف قطر جا المساوى جب فيلتقى هذا المحيط بخط جا المخرج فى نقطة د ويوصل دب فزاوية دبا المرسومة فى نصف الدائرة تصير قائمة (١٥ مقاله ٢) ويمتد عمود بد جهة ه ويؤخذ مه = مب ويوصل اه ثم ينزل عمودا مف و جو على ده من نقطتى م و ج ومن كون جب = جد و مه = مب يكون اج + جب = اد و ام + مب = ام + مه واذ فرض ان اج + جب = ام + مب كان اد = ام + مه فصار مائل اد > مائل اه فهو ابعد منه عن عمود اب فلذا صار بد > به او رب نصفه دب اكبر من بف نصف هب (١٢ مقالة ١) ولكن نسبة مثلثى ابج و ابم متحدى القاعدة اب كنسبة ارتفاعيهما بر و بف وحيث ان بر > بف ثبت المطلوب ان يكون مثلث ابج المتساوى الساقين اعظم من مثلث ابم ما ليس بمتساوى الساقين مع اتحاد القاعدة وتساوى الاطراف غيرهما

(الدعوى الثانية النظرية)

اعظم الاشكال الكثيرة الاضلاع المتحدة عدد اضلاعها المتساوية الاطراف ما كانت اضلاعه متساوية

(شكل ١٧٣) لانه اذا كان ابجده هو اعظمها ولم يكن ضلع بج مساويا بالضلع جد ينشأ مثلث بعد متساوى الساقين فوق قاعدة بد على ان يكون متساوى الاطراف بمثلث بجد فمثلث عبد المرقوم يكون اكبر من مثلث بجد فلزم ان يكون كثير الاضلاع

ا ب ع د هـ و اكبر من كثيرى الاضلاع ا ب ح د هـ و وحينئذ لم يكن ا ب ح د هـ و اعظم كثيرى الاضلاع المرقومة وهذا بخلاف ما قد فرضناه فلذا ثبت المطلوب من ان يكون ب ح = ح د في الاعظم وبمثل هذا يثبت ان ح د = د هـ و د هـ = هـ و الخ وان الاعظم هو ما تساوت اضلاعه

(الدعوى الثالثة النظرية)

(شكل ١٧٤) كافة المثلثات المرسومة بضلعين معلومين يحدث بينهما زاوية حيثما اتفق اعظمها ما كان بين ضلعيه المعلومين زاوية قائمة

مثلا اذا كان ب ا ح و ب ا د مثلثين وضلع ا ب مشتركا فيهما وضلع ا ح مساويا الضلع ا د وزاوية ب ا ح قائمة اقول ان مثلث ب ا ح القائم الزاوية اعظم من مثلث ب ا د الذى كانت زاويته ا حادة او منفرجة * الاشتراك قاعدة ا ب بين المثلثين المرقومين كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما ا ح و د هـ ولكن حيث ان عمود د هـ اصغر من مائل د ا المساوى ا ح فعلى مقتضى التناسب صار مثلث ب ا د اصغر من مثلث ب ا ح وثبت المطلوب

(الدعوى الرابعة النظرية)

اعظم كثيرى الاضلاع المرسومة باضلاع معلومة سوى ضلع اخير صار قطرا لمحيط دائرة يمر بجميع زواياه

(شكل ١٧٥) مثلا اذا كانت اضلاع ا ب و ب ح و ح د و د هـ و هـ و معلومة وكان ا ب ح د هـ و اعظم كثيرى الاضلاع المرسومة بها وضلع ا و غير محدود ووصل ا د و د و اقول ان لم تكن زاوية ا د و قائمة يضم الى قسمى ب ح د و د هـ و مثلث ا د و بان تجعل زاوية ا د و قائمة وهما باقيان على حالهما

وحيث ان هذا المثلث القائم الزاوية اكبر من المثلث المقدم فكأنه ضم الى كثير الاضلاع المفروض اكبر شيء قدرا وفيه خلف لما فرضنا فلذا علم ان كثير الاضلاع المرقوم لا يمكن ان يكون اعظم اصحابه ما لم تكن زاويته ا د و قائمة واثبات

عظمه يستلزم قيام سائر زواياه ا ـ و ، احو ، و ا هو ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يبر نصف المحيط المرسوم بنصف قطر او الغير المحدود بجميع زواياه ا و ب و ح و ء و هـ و وان الاعظم ما يبر المحيط المرقوم بسائر زواياه

تنبيه يرد سؤال وهو انه يمكن رسم كثير الاضلاع بطرائق متعددة بواسطة تلك الاضلاع المعلومة ويبر بزواياه نصف المحيط المنشا والضلع الاخير المجهول مقداره مثل (شكل ١٧٦) يعني ان ا ب يوتر الاقواس المرسومة بنصفي قطري اح و اء المختلفين هذا ولكن لاتزال اصغر الزوايا المركزية المسندة الى الوتر المرقوم واقعة في الدائرة التي نصف قطرها اكبر فاذا صارت اح ب < اء ب وحيث ان زاوية اءهـ = احء + حاء (مقالة ١) فتصير احء < اءهـ واذا ضعف الطرفان ظهر ان اح ب < اء ب

(الدعوى الخامسة النظرية)

لايمكن رسم كثير الاضلاع اب ح ء هـ و المعلوم اضلاعه سوى ضلع مجهول صار قطر النصف المحيط المار بزواياه الاعلى نسق واحد فقط

(شكل ١٧٥) لانه اذا فرض وجود دائرة اخرى يمكن رسمه فيها فان كانت اكبر منها اقول حيث ان اوتار اب و ب ح و حء الخ لاتوافق الاصغر الزوايا المركزية فمجموعها يكون اقل من قائمتين واذا يتعذر تلاصق نهايات الاضلاع بنهايتي قطر الدائرة * وان كانت اصغر وقع ذلك الخلاف وعدم الموافقة فظهر انه لايمكن رسمه الافي تلك الدائرة على سياق واحد فقط

تنبيه يمكن تغيير وضع اضلاع اب و ب ح و حء الخ كما يرادوا القطر باق على حاله وكذا المساحة

لانه وان تغير ترتيب أقواس اب و ب ح الخ بوجه ما حسبك ان يكون مجموعها مساويا لنصف المحيط * وفي كل حال لاتزال مساحة كثير الاضلاع بعينها حيث انها التفاضل بين مساحة الدائرة وبين مسائح قطع اب و ب ح الخ

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ١٧٧) اعظم جميع كثيرى الاضلاع المرسومة بالاضلاع المعلومة هو ما كان قابل الرسم داخل الدائرة يعنى ما يمكن رسم المحيط المار بجميع زواياه مثلا اذا كان ا ب ح ء ه و ر الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وكان اَ بَ حَ ءَ هَ وَ رَ غير قابل الرسم فيها وله اضلاع تساوى اضلاعه أى اذا كان ا ب = اَ بَ و ب ح = بَ حَ و ح ء = حَ ءَ الخ اقول ان كثير الاضلاع المرسوم فى الدائرة اكبر مما لم يرسم

لانه اذا رسم قطر ه م ووصل ا م و م ب وانشئ مثلث اَ مَ بَ على ضلع اَ بَ المساوى لضلع ا ب مساويا للمثلث ا ب م ووصل هَ مَ فعلى ما صرح به فى الدعوى الرابعة كثير الاضلاع ه و ر ا م المرسوم فى نصف المحيط الذى قطره م ه اكبر من كثير الاضلاع هَ وَ رَ اَ مَ الذى لا يرسم فيه والا لكان غير ممكن الرسم كما دلت عليه الدعوى الخامسة وبمثل هذا يثبت أن كثير الاضلاع ه ء ح ب م اكبر من كثير الاضلاع هَ ءَ حَ بَ مَ فيصير ه و ر ا م ب ح ء ه كثير الاضلاع الكامل اكبر من هَ وَ رَ اَ مَ بَ حَ ءَ هَ قطعا ولا يمكن ان يساويه *

وحيث امكن رسم احدهما فى الدائرة وامتنع رسم الآخر فاذا طرح من كل مثلثا ا م ب و اَ مَ بَ المتساويان يبقى كثير الاضلاع ا ب ح ء ه و ر المرسوم فى الدائرة اعظم من كثير الاضلاع اَ بَ حَ ءَ هَ وَ رَ الذى لم يمكن رسمه فيها

تنبيه مما صرح به فى الدعوى الخامسة ثبت انه لا يمكن ذلك الا فى دائرة واحدة فقط وكثير الاضلاع الاعظم لا يكون الا واحدا فقط وان المساحة السطحية منه تبقى بعينها وان تغير موضوع اضلاعه

(الدعوى السابعة النظرية)

الكثيرة الاضلاع المتساوية الاطراف المتحدة الاضلاع عددا اعظمها ما كان

منتظما

لانه قد ثبت فى الدعوى الثانية ان اعظم كثيرى الاضلاع ما تساوت اضلاعه واعظمها ما كان قابلا للرسم فى الدائرة كما تقدم فى الدعوى الماضية ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون المنتظم اعظمها

(الدعوى الثامنة الفائدة)

النسبة بين الزاويتين المركزيتين المسوحتين فى الدائرتين المختلفتين كنسبة قوسيهما المحصورين بين محيطيهما منقسمين على نصفى قطريهما

مثلا (شكل ١٧٨) تكون نسبة زاوية ح الى زاوية ط كنسبة اب/اح الى دە/دط

فاذا رسم قوس ور بين طرفى طد و طه بنصف قطر طو المخرج المساوى لنصف قطر اح اولا لتساوى انصاف اقطار اح و طو تكون ح : ط :: اب : ور أو :: اب/اح : ور/وط ولكن لمشابهة قوسى ور و ده تكون ور : ده :: وط : دط فلذا صارت نسبة ور/وط مساوية لنسبة ده/دط ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون ح : ط :: اب/اح : ده/دط

(الدعوى التاسعة المنظرية)

كثيرا الاضلاع المنتظمان المتساويا الاطراف اكبرهما اكثر الاضلاع عددا (شكل ١٧٩) اذا كان ده نصف ضلع احدهما و ط مركزه و طه بعد مركزه* و اب نصف ضلع الآخر و ح مركزه و حب بعد مركزه *فاذا فرض ان مركزى ط و ح موضوعان على طح اى بعدوان بعدى طه و حب موجودان باستقامة طح وحيث ان زاويتى دطه و احب نصفا زاويتى كثيرى الاضلاع المركزيتين الغير المتساويتين فخطا حا و طد يلتقيان فى نقطة و اذا امتدا على الاستقامة وينزل من هذه النقطة عمود ور على طح ويرسم قوسا رب و رح منتهيين الى ضلعى حو و طو بان تكون نقطتا ط و ح مركزين

فاذا كان الامر كما ذكر تكون ط : ح :: رب/طر : رح/رح كما صرح به

فى الفائدة المتقدمة ولكن نسبة ءه نصف الضلع الى اطراف كثير الاضلاع كنسبة زاوية ط الى اربع قوائم وايضا حيث ان نسبة اب نصف الضلع الى اطراف كثير الاضلاع الثانى كنسبة زاوية ح الى أربع قوائم ولتساوى اطراف كثيرى الاضلاع كانت ءه : اب :: ط : ح أو ءه : اب :: رب/طر : رح/رح فاذا ضربت مقدمات هذا التناسب فى مقدار طر وتواليه فى حر تكون ءه × طر : اب × رح :: رب : رح ولكن لتشابه مثلثى طءه و طور كانت طه : طر :: ءه : ور وبه يكون ءه × طر = طه × ور وايضا التشابه مثلثى احح و وحر يكون اب × رح = حب × ور فلذا صارت طه × ور : حب × ور :: رب : رح أو طه : حب :: رب : رح ومن هذا علم انه متى كان قوس رب اكبر من قوس رح يلزم ان يكون بعد مركزه طه اكبر من حب بعد المركز الآخر فاذا عمل فى الطرف الآخر من خط حر شكل حكس مساويا تاما الشكل حرس بان يكون حك = حر وزاوية ححك = ححر وقوس كس = سر وحيث ان منحنى كسر اكبر من قوس كحر لاحاطته به وحيث ان رس نصف المنحنى اكبر من رح نصف القوس كان ذلك ابهز دليل على ان قوس رب اكبر من قوس رح فعلى هذا ظهر ان طه بعد المركز أكبر من حب البعد الآخر ولاجرم ان النسبة بين كثيرى الاضلاع المتساويى الاطراف كالنسبة بين بعديهما من المركز فلذا كان كثير الاضلاع الذى نصف ضلعه ءه أكبر مما كان نصف ضلعه اب وحيث ان الزاوية المركزية من كثير الاضلاع الاول أصغر قدرا كانت اضلاعه أكثر عددا * ومن أجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون أعظم كثيرى الاضلاع المنتظمين ما كان أكثر الاضلاع عددا

(الدعوى العاشرة النظرية)

الدائرة اعظم كافة كثير الاضلاع المتساوية الاطراف

(شكل ١٨٠) كثيرة الاضلاع المتساوية الاطراف المتحدة العدد ضلعا أعظمها

ما كان منتظما وقد سبق اثباته * فالآن لاحاجة الالتقدير كثير الاضلاع المتساوى الاطراف المنتظم بالدائرة فقط

اذا كان اب نصف ضلع كثير الاضلاع المرقوم و ح مركزه فاقول متى كانت زاوية ء ط هـ فى الدائرة المتساوية الاطراف = ا ح ب نظرا لهذا الحال يصير قوس ء هـ مساويا لنصف ضلع اب ومن كون نسبة كثير الاضلاع ك الى دائرة ء كنسبة مثلث ا ح ب الى قطاع ط ء هـ من أجل هذا كانت ك : ء :: $\frac{1}{2}$ اب × ح ب : $\frac{1}{2}$ ء هـ × ط هـ :: ح ب : ط هـ فاذا يرسم خط هـ د المماس من نقطة هـ بان يلاقى ط ء المخروج فى نقطة د فيتاتى من تشابه مثلثى ا ح ب و د ط هـ هذا التناسب ح ب : ط هـ :: اب أو ء هـ : د هـ فاذا صارت ك : ء :: ء هـ : د هـ أو كنسبة هـ ء × $\frac{1}{2}$ ط هـ أعنى مساحة قطاع ء ط هـ الى د هـ × $\frac{1}{2}$ ط هـ وهو مساحة مثلث د ط هـ وحيث ان القطاع أصغر من المثلث يكون ك يعنى كثير الاضلاع أصغر من ء يعنى الدائرة من أجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون الدائرة أعظم كثيرى الاضلاع المنتظمة المتساوية الاطراف

(تمت المقالة الرابعة)

المقالة الخامسة

فى بيان السطوح المستوية والزوايا المجسمة

الحدود

(حد ١) متى كان خط مستقيم عمودا على جميع الخطوط المستقيمة التى تمر بموقعه فى سطح مستو فيصير عمودا على ذلك المستوى والمستوى يكون عليه عمودا (٤) والموقع هو نقطة التقاء المستوى بالعمود

٢ اذا امتد الخط المستقيم والسطح المستوى ولا يلتقيان فالخط يكون موازيا للسطح والسطح أيضا يكون موازيا له

٣ المستويان المتوازيان لا يلتقيان أبدا اذا امتدا بلانهاية

٤ سيأتى فى الدعوى الثالثة ان الفصل المشترك للسطحين المتقيين خط مستقيم والزاوية أو الانحراف الذى بينهما هو مقدار ما بين السطحين من انفراج قل أو كثر وتعين مساحته بالزاوية الواقعة بين العمودين المخرجين من نقطة واحدة من الفصل المشترك فى كل من السطحين وسيأتى ذكره تفصيلا فى الدعوى السابعة وتلك الزاوية اما ان تكون حادة أو قائمة او منفرجة

٥ فان كانت قائمة يصير كل واحد من المستويين عمودا على الآخر

٦ الزاوية المجسمة هى المساحة المنزوية الحاصلة من اشتمال جملة سطوح مستوية قد اجتمعت فى نقطة واحدة فلذا (شكل ١٩٩) زاوية ب المجسمة حصلت من اجتماع مستويات ا ب ت و ب ج و ج ب د و د ب ا

اقل ما يلزم لتشكيل زاوية مجسمة ثلاثة مستوية

(الدعوى الاولى النظرية)

لا يمكن ان يكون بعض المستقيم فى المستوى وبعضه خارجا عنه

لأن وجود نقطتين مشتركتين من هذا الخط فى المستوى يستلزم كون جميع

المستقيم

المستقيم الذي وجد بعضه على المستوى لاشتراكه به في نقطتين ووجوده بتمام اجزائه على ذلك المستوى ظاهر كما مر في تعريف المستوى

تنبيه لاجل ادراك استواء السطح لابد من تطبيق خط مستقيم على ذلك السطح من جهات مختلفة وان يرى تماسه بجميع اجزاء امتداده بذلك السطح

(الدعوى الثانية النظرية)

الخطان المستقيمان المتقاطعان يعينان وضع مستو وهما موجودان عليه (شكل ١٨١) مثلا اذا تقاطع خطا ا ب و ا ح المستقيمان في نقطة ا اولا يتصور المستوى الذي فيه يوجد ا ب ثم يدور حوله حتى يمر بنقطة ح وحيث وجد نقطتا ا و ح من خط ا ح في ذلك المستوى وجب وجوده كاملا فيه وتبين ان وضع ذلك المستوى يتعين بجهة احاطة خطي ا ب و ا ح وثبت المطلوب

(نتيجة ١) مثلث ا ب ح أو ثلاث نقط ليست على مستقيم واحد تعين وضع مستو

(نتيجة ٢) (شكل ١٨٢) ايضا خطا ا ب و ح د المتوازيان يعينان وضع مستو * لانه اذا رسم خط هو القاطع فالمستوى الذي حوى خطي اه و هو هو مستوى خطي ا ب و ح د

(الدعوى الثالثة النظرية)

اذا تقاطع المستويان فيكون الفصل المشترك خطا مستقيما * لانه اذا وجد من النقط المشتركة بين المستويين ثلاث نقط ليست على خط مستقيم فلابد من مرور كل من المستويين من تلك النقط ولا يمر من ثلاث نقط الا مستو واحد فقط كما هو صريح الدعوى التي تقدمت فمن هذا يلزم ان يكون المستويان مستويا واحدا وهذا بخلاف مانطقت به الدعوى ومن أجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون الفصل المشترك خطا مستقيما

(الدعوى الرابعة النظرية)

(شكل ١٨٣) اذا كان خط اد المستقيم عمودا على محل تقاطع خطي د ب و د ح المتقاطعين في مستوى م ن يصير عمودا على كل خط مستقيم يمر بوقعه نحو د ك وأيضا على مستوى م ن

يرسم خط ب ج المستقيم المار بنقطة ك التى تعينت كيفما اتفق على خط دك فى زاوية ب د ج بان يكون ب ك = ك ج (مقالة ٣ عملى ٥) وتوصل خطوط اب و اك و اج فاقول حيث انقسمت ب ج قاعدة مثلث ب د ج بمتساويين فى نقطة ك يصير دج^{2} + دب^{2} = ٢ دك^{2} + ٢ كج^{2} وكذلك فى مثلث ب اج اج^{2} + اب^{2} = ٢ اك^{2} + ٢ جك^{2} فاذا طرحت المتساوية الاولى من هذه يصير اج^{2} − دج^{2} + اب^{2} − دب^{2} = ٢ اك^{2} − ٢ دك^{2}

ولكن لقيام كل من مثلثى ادج و ادب فى نقطة د يكون اج^{2} − دج^{2} = اد^{2} وكذا اب^{2} − دب^{2} = اد^{2} فاذا وضع اد^{2} فى مقامه فى المساواة الاولى يصير اد^{2} + اد^{2} = ٢ اك^{2} − ٢ كد^{2} وحيث لم تزل المساواة باقية على حالها اذا تنصف الطرفان صار اد^{2} = اك^{2} − كد^{2} او اك^{2} = كد^{2} + اد^{2} فلذا ثبت قيام مثلث ادك فى نقطة د (مقالة ٣) وظهر كون خط اد عمودا على خط دك

تنبيه لم تختص هذه الدعوى بثبوت امكان ان يكون الخط المستقيم عمودا على جميع الخطوط التى تمر بوقعه فى المستوى انما المراد منها كلما كان الخط المستقيم عمودا على الخطين المتقاطعين فى المستوى يصير فيه تحقيق كاف وبيان شاف لاثبات ماقد ورد فى الحد الاول من هذه المقالة

(نتيجة ١) حيث ان عمود اد أقصر من اك أى مائل فهو البعد الحقيقى بين نقطة ا ومستوى دك

(نتيجة ٢) لايمكن اقامة عمود من نقطة د المفروضة على مستوالا عمود واحد فقط

لانه

لانه لو أمكن اخراج عمودين من عين نقطة د فاقول اذا مر بمستو من هذين العمودين وكان الفصل المشترك بينه وبين مستوى م ن مثلا دك فكل واحد من هذين العمودين يصير عمودا على خط دك واذا امكن اخراج عمودين من نقطة واحدة على مستقيم فى مستو واحد وهذا مستحيل فلذا تبين انه لا يمكن اخراج عمودين على مستو واحد من نقطة واحدة واقعة على ذلك المستوى * وأيضا لا يمكن تنزيل عمودين على مستو من نقطة خارجة عنه لانه لو كان اد و اك عمودين يلزم قيام زاويتى ادك و اكد من مثلث ادك وقد استحال

(الدعوى الخامسة النظرية)

الموائل التى افترقت عن العمود بابعاد متساوية تكون متساوية والتى افترقت بابعاد مختلفة أبعدها من العمود اطول

(شكل ١٨٤) لانه متى كانت زوايا ادب و ادح و ادو قائمة وفرضت ابعاد دب و دح و دو متساوية فالمثلثات ادب و ادح و ادو تكون متساوية لتساوى مثنى الاضلاع وآحاد الزوايا التى بينهما فلذا صارت أوتار القوائم متساوية وهى موائل اب و اح و او * وايضا اذا فرض ان بعد ده أطول من بعد دو أو مساويه دب ثبت المطلوب من ان يكون مائل اه أكبر من مائل اب أو او

نتيجة جميع الخطوط المائلة المتساوية نحو اب و اح و او الخ تكون منتهية الى محيط بحو المرسوم بمركز د موقع العمود ومتصلة به فلذا اذا كانت نقطة ا الخارجة عن المستوى معلومة معينة واريد وجود نقطة د موقع العمود الذى يراد تنزيله منها على المستوى المرقوم أقول أولا تعين نقط ب و ح و و الثلاث على المستوى بان تكون ابعادها متساوية من نقطة ا المعينة ثم اذا استخرج مركز الدائرة التى تمر بهذه النقط فهو د موقع العمود المطلوب

تنبيه زاوية ادب هى ميل أو انحراف مائل اب على مستوى م ن

وانحراف موائل اب و اح و او الخ حيث تساوت مثلثات ا ب د
و احد و اود *

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ١٨٥) اذا كان خط او عمودا على مستوى م ن وخط ب ح موضوعا عليه وأنزل عمود ود على ب ح من نقطة و موقع العمود ووصل اد فهذا الخط الموصول يصير عمودا على خط ب ح

فاذا اخذ د ب = د ح ووصل و ب و و ح و ا ب و ا ح فاقول حيث ان د ب = د ح يكون مائلا و ب و و ح متساويين وأيضا من كون و ب = و ح يكون مائلا ا ب و ا ح متساويين نظرا الى عمود او ولوجود نقطتي ا و د من خط اد على ابعاد متساوية من نهايتي ب و ح يكون خط اد عمودا على وسط خط ب ح

نتيجة لقد تبين من هذا ان خط ب ح صار عمودا على مستوى اود * لانه عمود على كلا خطي اد و ود

تنبيه خطا اهـ و ب ح المستقيمان لا يلتقيان اصلا * لانهما كالمتوازيين وان ليسوا على مستو واحد والبعد الاقرب بينهما هو خط ود العمود على كل منهما لانه اذا وصل بين نقطتين اخريين نحو ا و ب يكون اب > اد و اد > دو فلذا اب > دو

واما رسم زاوية قائمة بين خطي اهـ و ب ح فممكن هذا وان لم يكونا على مستو واحد لانه تحدث زاوية قائمة بين خط اهـ وبين الخط المرسوم من احدى نقطه موازيا لخط ب ح وكذا يمكن ان ترسم زاوية قائمة بين كل خطين ليسا على مستو واحد نحو اب و دو مثل التي رسمت بين خط اب وبين الخط المرسوم من نقطة منه موازيا لخط دو

(الدعوى السابعة النظرية)

(شكل ١٨٦) اذا كان خط اد عمودا على مستوى م ن فكل خط يوازيه نحو هو يكون عمودا على المستوى المرقوم

فاقول اذا مر بمستو من خطى ا ى و هو المتوازيين خط د و يصير فصلا مشتركا
بينه و بين مستوى م ن فاذا اخرج عمود ب ح على خط د و فيه يكون
عمودا على مستوى ا د و ه كما هو مصرح في نتيجة الدعوى التي تقدمت فزاوية
ب و ه تكون قائمة وكذا زاوية ه و ى * لان خط ا ى عمود على خط د و وخط
ه و موازله وحيث صار خط ه و عمودا على خطى د و و ب ح ثبت المطلوب من
ان يكون عمودا على مستوى م ن

(نتيجة ١) وبالعكس اذا كان خطا ا ى و ه و عمودين على مستوى م ن يصيران
متوازيين * لانه ان لم يكونا متوازيين واقيم من نقطة و خط موازلخط ا ى
فهذا الخط يصير عمودا على مستوى م ن واذا الامكن اخراج عمودين من نقطة
واحدة على مستو واحد وهو محال كما صرح في الدعوى الرابعة

(نتيجة ٢) اذا كان خطا ا و ب المستقيمان موازيين لخط ح المستقيم الثالث
يكونان متوازيين * لانه اذا تصور مرور مستو عمودا على خط ح فيصير موازياه
ا و ب عمودين عليه وعلى ما صرح به في الدعوى التي تقدمت يكونان
متوازيين

و يفهم من هذه النتيجة ان تلك الخطوط ليست على مستو واحد لان ذلك تقدم
ذكره في المقالة الاولى

(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ١٨٧) اذا كان خط ا ب موازيا لخط ح د المرسوم في مستوى م ن
يكون موازيا ايضا للمستوى المرقوم

لانه اذا كان ا ب في مستوى ا ب ح د الملاقي مستوى م ن فاقول حيث
لا يمكن وجود بعض نقط من ح د الفصل المشترك في غير مستوى م ن وان
خط ا ب موازلخط ح د فلا يلاقيه اصلا ومن ذلك لا يلاقي ذلك المستوى
ويوازيه (ح د ٢)

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ١٨٨) اذا كان مستويا م ن و س ع عمودين على خط ا ب يصيران

متوازيين

لانه اذا فرض بينهما التلاقي وكانت نقطة و مشتركة فيهما فاقول اذا وصل خطا او و ب و يكون خط ا ب عمودا على كل منهما حيث كان عمودا على كل من مستويي م ن و س ع وعلى كل خط يمر بموقعه فيهما واذا لا امكن انزال عمودين من نقطة واحدة على مستقيم واحد وهو محال ومن اجل ذلك استحال التقاء مستويي م ن و س ع وثبت التوازي

(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ١٨٩) هـ و و د ح الفصلان المشتركان الحادثان من تلاقي مستويي م ن و س ع المتوازيين بمستوى و و الثالث متوازيان* اقول حيث ان خطي و هـ و ح د على مستو واحد فان لم يتوازيا وان امتدا التقيا يلزم التقاء مستويي م ن و س ع واذا لا انتفى عنهما التوازي وهذا خلاف ما فرضناه ومن أجل ذلك وجب توازي و هـ و د ح الفصلين المشتركين واستحال الالتقاء وثبت المطلوب

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

(شكل ١٨٨) اذا كان خط ا ب عمودا على مستوى م ن ايضا يكون عمودا على مستوى س ع الموازي له

أقول يرسم خط ح ب كيفما اتفق في مستوى س ع ويمر بمستوى ا ح من خطي ا ب و ح ب فالفصل المشترك بينه وبين مستوى م ن وهو خط ا ى يوازي خط ح ب وحيث ان خط ا ب عمود على مستوى م ن يكون عمودا على خط ا ى الذي فيه فيصير عمودا على خط ب ح الذي يوازيه ومتى كان ا ب عمودا على كل خط يمر بموقعه نحو ب ح يصير عمودا على مستوى س ع ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

(شكل ١٨٩) هـ د و و ح المتوازيان الواقعان بين مستويي م ن و س ع المتوازيين متساويان

فاقول اذا مر بمستوى هر ح و من متوازيى هر و وح فيلاقى المستويين المتوازيين فى هو و رح وهما متوازيان وحيث فرض توازى هر و وح صار شكل هرحو متوازى الاضلاع ومن ثمة ثبت ان يكون هو = وح
نتيجة لقد ظهر من هذه الدعوى ان المستويات المتوازية لاتزال على ابعاد متساوية فى كل جهة * لان خطى هر و وح متى كانا عمودين على مستويى م ن و س ع يتوازيان ويتساويان

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٠) اذا كانت زاويتا حاه و ء ب و المختلفة المستوى متوازية الاطراف متحدة الجهة وضعا تكونان متساويتين * ومستوياهما يصيران متوازيين فاذا اخذ اح = ب ء و اه = ب و ووصل هح و ء و و اب و حء و هو
فاقول حيث ان اح مساو وموازلخط ب ء يكون شكل اب ء ح متوازى الاضلاع (مقالة ١) فخط ح ء يوازى ويساوى خط اب وبمثل هذا ثبت ان خط هو يوازى ويساوى خط اب وكذلك من توازى وتساوى خطى ح ء و هو يكون شكل ح ه و ء ايضا متوازى الاضلاع فلذا صار ضلع هح موازيا ومساويا للضلع ء و فعلى هذا يتساوى مثلثا حاه و ء ب و وزاوية حاه تساوى زاوية ء ب و
الصورة الثانية مستوى احه يوازى مستوى ب ء و * لانه اذا فرض ان المستوى الموازى لمستوى ب و ء المار بنقطة ا يلتقى بخطى ح ء و هو فى غير نقطتى ح و ه مثلا فى نقطتى ر و ع فتتساوى خطوط اب و ر ء و وع الثلاثة كما مر فى الدعوى الثانية عشرة وقد ثبت آنفا تساوى خطوط اب و ء ح و هو الثلاثة واذن لزم ان يكون ح ء = ر ء و هو = وع وهذا مستحيل ومن اجل ذلك وجب التوازى بين مستويى احه و ب و ء وثبت المطلوب
نتيجة زاويتا حاه و ء ب و الحادثتان من الفصول المشتركة بالتقاء مستويى

م ن و س ع المتوازيين بمستوي ح ا ب د و ه ا ب و الآخرين تكونان متساويتين * لان فصل ا ح موازلفصل ب د وايضاالتوازى ا ه و ب و تكون زاوية ح ا ه مساوية لزاوية د ب و *

(الدعوى الرابعة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٠) اذاتساوت وتوازت ا ب و ح د و ه و الثلاثة خطوط المستقيمة التى ليست على مستو واحد يتساوى المثلثان ا ح ه و ب د و الحادثان من وصل نهايات تلك الخطوط وتتوازى سطوحها

اقول حيث ان خط ا ب موازومساولخط ح د يكون شكل ا ب ح د متوازى الاضلاع فيكون ضلع ا ح موازيالضلع ب د وايضاضلعا ا ه و ب و وضلعا ح ه و د و فعلى هذا يتساوى المثلثات المرقومان ويثبت المطلوب من ان يكون مستوياهما متوازيين كما صرح به فى الدعوى التى تقدمت

(الدعوى الخامسة عشرة النظرية)

الخطان المستقيمان الواقعان بين ثلاثة مستوية متوازية منقسمان على اقسام متناسبة

(شكل ١٩١) مثلااذافرض التقاء خط ا ب بمستوى م ن و س ع و ف ص فى نقط ا و ه و ب وخط ح د فى نقط ح و و و د فيحصل تناسب اه : ه ب :: ح و : و د

فاذاوصل ا د فيلتقى بمستوى س ع فى نقطة ر واذاوصل ا ح و ه ر و ر و و ب د يكون ه ر و ب د الفصلان المشتركان بين مستويى س ع و ف ص وبين مستوى ا ب د متوازيين فتكون اه : ه ب :: ار : ر د ولتوازى فصلى ا ح و ر و صارت ار : ر د :: و ح : و د ولوجود النسبة المشتركة فى هذين التناسبين ثبت المطلوب من ان تكون اه : ه ب :: ح و : و د

(الدعوى السادسة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٢) ذواربعة اضلاع ما ا ب ح د موضوعا كان على مستو واحد

او

أوغير موضوع اذا قطع ضلعيه المتقابلين خطا هو و رح المستقيمان على التناسب اعنى اذا كان اه : هب :: دو : وح و بر : رح :: اح : ح‌ى ● فالخطان القاطعان هو و رح يقتطعان فى نقطة م على ان تكون مح : مر :: اه : هب و هم : مو :: اح : حى

فاذا مر بمستوى اَ بَ حَ دَ على اد بشرط ان لا يمر من رح ورسمت خطوط هه‌َ و بب‌َ و حح‌َ و وو‌َ موازية للخط رح من نقط ه و ب و ح و و فهذه الخطوط تلتقى بذلك المستوى فى نقط هَ و بَ و حَ و وَ ولتوازى خطوط ب‌بَ و رح و ح‌حَ (١٥ مقالة ٣) فتكون بَ‌ح : حوَ :: بر : رح :: اح : حى فلذا تشابه مثلثا اح‌بَ و ى‌ح‌حَ (٢٠ مقالة ٣) وبعد تصير اهَ : هَ‌بَ :: اه : هب و دوَ : حوَ :: دو : وح وايضا اهَ : هَ‌بَ :: دوَ : حوَ أو بطريق البدل اهَ : دوَ :: اَبَ : دحَ لكن لتشابه مثلثى اح‌بَ و ى‌ح‌حَ تكون اَبَ : دحَ :: اح : حى وبه تكون اهَ : دوَ :: اح : حى

ولتشابه مثلثى اح‌بَ و ح‌ح‌ى تكون زاوية هَاح تساوى زاوية ح‌ى‌وَ فلذا يتشابه مثلثا اح‌هَ و ى‌ح‌وَ (٢٠ مقالة ٣) فلذا زاوية اح‌هَ = ى‌ح‌وَ فبدا ان يكون هَ‌ح‌وَ خطا مستقيما واحدا وايضا هه‌َ و رح و وو‌َ الخطوط الثلاثة المتوازية تكون واقعة فى المستوى الذى فيه خطا هو و رح المستقيمان المتقاطعان فى نقطة م ثم يظهر هذا التناسب هم : مو :: هَ‌ح : حوَ :: اح : حى وذلك لتوازى هه‌َ و مح و وو‌َ

فاذا جرى العمل المرقوم على خط اب يثبت تناسب حم : مر :: اه : هب

●(الدعوى السابعة عشرة النظرية)●

(شكل ١٩٣) يمكن ان تعين مساحة الزاوية الواقعة بين مستويى م اك و م اب

بزاوية د اسـ الحادثة بين عمودى اد و اسـ المخرجين فى كل من المستويين على الفصل المشترك ام كما ذكر فى الحد الرابع

ولاجل اثبات ذلك كما ينبغى وبيان كيفية الطريق التى يستقر عليها ويدوم اجراؤه فيه ومن أى نقطة من الفصل يخرج العمودان لابد من البحث عن ذلك فاذا اخذت م نقطة اخرى على ام الفصل المشترك واقيم عمود مح فى مستوى مد وعمود مـ فى مستوى مسـ وحيث ان كل واحد من خطى مـ و اسـ عمود على مستقيم ام يكونان متوازيين وايضا خط مح يوازى خط اد فلذا صارت زاوية ـمح = سـاد فتبين ان الزاوية الحادثة باخراج العمودين سواء كانت من نقطة ا أو من نقطة م أو من اى نقطه كانت على الفصل المشترك لم تزل بعينها

ثانيا اذا زادت أو نقصت الزاوية التى بين المستويين ببعض النسب هلا تزيد زاوية سـاد كذلك بلى ولكن يلزم البحث ايضا عن ذلك فاذا جعلت نقطة ا مركزا ورسم ببعد كيفما اتفق قوس دسـ فى مستوى سـاد ورسم ايضا قوس حهـ من مركز م بالبعد المذكور ووصل اى كيفما اتفق * اقول حيث ان مستويى سـاد و سـمح عمودان على مستقيم ام يكونان متوازيين فلذا صار اى و مه الفصلان المشتركان بين المستويين المرقومين وبين مستوى امى متوازيين وزاوية سـمه تساوى زاوية سـاى تسهيلا للادراك اذا سميت الزاوية التى بين مستويى مسـ و مد وكنا علمت كما ذكر وساوت زاوية داسـ زاوية داد لاجرم ان ركن دامسـ يساوى ركن دامد * وذلك بانه اذا وضعت قاعدة سـاى على مساويتها داد وضعا صحيحا تاما فينطبق الركنان ويتحدان لاتحاد ارتفاع ام فيهما فتبين ان كمية اشتمال زاوية داسـ على زاوية داسـ قدر كمية اشتمال ركن دامسـ على ركن دامسـ وان النسبة بين زوايتى داسـ و داسـ كما بين ركنى دامسـ و سـامد وما ذكر من التفاصيل فى الدعوى السابعة عشر من المقالة الثانية يشابه ما اورد ههنا ومن اجل ذلك صارت تؤخذ

زاوية

زاوية ه ا ب لتعيين مساحة ركن ب ا م ه اعنى الزاوية التي بين مستوى م ا ب و م ا ه كما لا يخفى

تنبيه لقد علم ان الزاوية المرسومة بين المستويين كالزاوية المرسومة بين الخطين المستقيمين

فلذا اذا تنافذ المستويان فالزاويتان المتقابلتان يتساويان ومجموع المتجاورتين يساوى قائمتين واذا كان أحد المستويين عمودا على الآخر يكون الآخر عمودا عليه فعلم ان ما بين المستويين المتوازيين المقطوعين بمستو ثالث من الخواص وتساوى الزوايا عين ما بين المستقيمين المتوازيين المقطوعين بمستقيم ثالث ولا مراء

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٤) اذا كان خط ا ب عمودا على مستوى م ه فكل مستوى ا ب يمر به يكون ايضا عمودا عليه

اقول اذا كان خط ح ب فصلا مشتركا بين مستويى ا ب و م ه واقيم عمود د ه على خط ب ب فى مستوى م ه فيكون ا ب عمودا عليه يصير عمودا على كل من خطى ب ح و د ه وحيث ان زاوية ا ب د الحادثة من عمودى ب ا و ب د الواقعين على ب ب الفصل المشترك هى معيار لمقدار ما بين مستويى ا ب و م ه وقائمة لزم ان يكون المستويان متعامدين (حده)

تنبيه اذا تعامدت الخطوط الثلاثة ا ب و ب ب و د ب كان كل واحد منها عمودا على مستوى الآخرين وتتعامد السطوح المستوية الثلاثة التى احتوت على تلك الخطوط

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

(شكل ١٩٤) اذا كان مستوى ا ب عمودا على مستوى م ه واخرج عمود ب ا فى مستوى ا ب على ب ب الفصل المشترك فعمود ب ا يكون عمودا على مستوى م ه

لانه اذا أخرج عمود سد فى مستوى م ن على خط سب فزاوية اسد تصير قائمة * لان المستويين متعامدان ومن كون اب عمودا على خطى سب و سد فى مستوى م ن يكون عمودا على المستوى المرقوم *

نتيجة اذا كان مستوى اب عمودا على مستوى م ن واخرج عمود من ب نقطة الفصل المشترك على مستوى م ن فهذا العمود يوجد فى مستوى اب فان قيل لم يكن فيه اقول حيث يمكن اخراج عمود اب على الفصل المشترك ب فى مستوى اب فهذا العمود يصير كذلك عمودا على مستوى م ن واذن أمكن اخراج عمودين من نقطة واحدة على مستو واحد وهو محال

(الدعوى العشرون النظرية)

(شكل ١٩٤) اذا كان مستويا اب و اد عمودين على مستوى م ن الثالث ففصلهما المشترك اب يصير عمودا على المستوى المرقوم * لانه اذا اخرج عمود من نقطة ب على مستوى م ن فلابد لهذا العمود ان يوجد فى كلا مستويى اب و اد معا * وماهو الا اب ومن ثمة ثبت المطلوب ان يكون عمودا

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

(شكل ١٩٥) اذا تشكلت الزاوية المجسمة من ثلاث زوايا مسطحة فمجموع كل اثنين منها أكبر من الثالثة

شرط فى هذا الباب ان تكون كل واحدة من مجموع الاثنين اصغر من الثالثة لانها اذا كانت اكبر فلا حاجة حينئذ للاثبات انما يفرض فى زاوية ب المجسمة التى تشكلت بثلاث زوايا اب و اسح و سح المسطحة ان زاوية اسب هى الاكبر اقول ان اسب > اسح + بسح * لانه اذا أنشئت زاوية بسد فى مستوى اسب مساوية لزاوية بسح ورسم خط اد المستقيم كيفما اتفق واخذ سح = سد ووصل اح و حب فمن كون ضلعى سب و سد مساويين لضلعى سب و سح وتساوى زاويتى بسد و بسح بالعمل يلزم تساوى مثلثى بسد

و ب عند ح فاذن ب ى = ب ح لكن ا ب < اح + ب ح
فاذا طرح من أحد طرفى هذين الغير المتساويين ب ى ومن الآخر ب ح
المساوى له يبقى ا ى < اح ومن تساوى ضلعى اب و ى ب لضلعى
اب و ب ح وحيث ان اى الثالث اصغر من اح تكون زاوية ا ب ى
< ا ب ح (١٠ مقالة ١) فاذا اضيف الى كل من طرفى هذين الغير المتساويين
زاويتا ب ب ى و ب ب ح المتساويتان يثبت المطلوب من ان يكون
ا ب ى + ب ب ى او ا ب ب < ا ب ح + ب ب ح

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

مجموع الزوايا المسطحة التى تحيط بالجسمة لا يزال أصغر من اربع قوائم
(شكل ١٩٦) اذا قطعت زاوية ب الجسمة بمستو ما ا ب ح ى ه ووصلت
خطوط وا و وب و وح و وى و وه من نقطة و المفروضة على ذلك
المستوى الى سائر رؤس الزوايا فيكون عدد المثلثات ا ب ب و ب ب ح و ح ب ى
الخ التى داخل الجسمة ورأسها ب ومجموع زواياها مكافئ لعدد المثلثات
المجتمعة فى نقطة و اعنى او ب و ب و ح و ح و ى الخ ومجموع زواياها ولكن
حيث ان مجموع زاويتى ا ب و و ب ح المجتمعتين فى نقطة ب اى زاوية ا ب ح
اصغر من مجموع زاويتى ا ب ب و ب ب ح وكذلك ما كانتا فى نقطة ح نحو
ب ح و + و ح ى < ب ح ب + ب ح ى وكذا سائر زوايا كثير الاضلاع
ا ب ح ى ه هى الاصغر فتبين ان مجموع الزوايا التى توجد على قواعد المثلثات
المجتمعة رؤسها فى نقطة و اصغر من مجموع الزوايا التى توجد على قواعد
المثلثات المجتمعة رؤسها فى نقطة ب ومن ثمة صار مجموع الزوايا المرسومة حول
نقطة و اكبر من مجموع الزوايا التى فى نقطة ب نظرا للمكافأة المجموعين*
لكن مجموع ما حول نقطة و من الزوايا مساو لاربع قوائم (٥ مقالة ١) ومن
اجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون مجموع الزوايا التى تصور زاوية ب الجسمة
اصغر من اربع قوائم

تنبيه شرط فى هذه الدعوى ان تكون الجسمة محدبة واذا امتد احد سطوحها

ولا يقطعها

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

اذا تركب الزاويتان المجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية المتناظرة فالانحراف الذي بين المستوبين المتساويي الزوايا يكون متساويا

مثلا (شكل ١٩٧) اذا كانت الزوايا التي تحيط بزاويتي ب و ط المجسمتين زاوية اب ح = زاوية دطو وزاوية اب ب = زاوية دطه وزاوية ب ب ح = زاوية هطو فالانحراف بين مستويي اب ح و اب ب يساوي انحراف مستويي دطو و دطه

فيؤخذ ب ب كيفما اتفق وينزل عمود ب ع من نقطة ب على مستوى اب ح ويقام عمودا ع ا و ع ح على ب ا و ب ح من نقطة ع ملتقى العمود المرقوم بذلك المستوى ويوصل اب و ب ح ثم يؤخذ طه مساويا للخط ب ب وينزل عمود ه ف على مستوى دطو ومن نقطة ف يقام عمودا ف د و ف و على طد و طو * ثم اذا وصل ده و هو فيصير مثلث ب ا ب قائما في زاوية ا ومثلث ط د ه في زاوية د وحيث ان زاوية اب ب = دطه فزاوية ب ب ا = طه د ولكون ب ب = طه يكون مثلث ب ا ب مساويا لمثلث ط د ه فلذا ب ا = ط د و اب = ده وبمثل هذا يكون ب ح = طو و ب ح = هو

فاذا كان الامر كما ذكر اولا ان ب ا ع ح ذا الاربعة الاضلاع مساو لذي الاربعة الاضلاع ط د ف و

لانه اذا وضعت زاوية اب ح على مساويتها دطو فبكون ب ا = طد و ب ح = طو تقع نقطة ا على نقطة د ونقطة ح على نقطة و واذا وقع اع العمود فوق ب ا على د ف العمود على دط وايضا يوجد ع ح على ف و فتقع نقطة ع على ف فيصير اع = د ف لكن لقيام مثلثي اع ب و د ف ه في نقطتي ع و ف وتساوي اب و ده وتري القائمتين منهما وضلع اع بضلع د ف يكونان متساويين (مقالة ١) فتكون زاوية

ع ا ب = ف ى هـ وحيث ان زاوية ع ا ب هى الانحراف بين مستوى ا س ب و ا س ح وزاوية ف ى هـ هى الانحراف بين مستوى ى ط هـ و ى ط و فقد صار الانحرافان المرقومان متساويين

واما كون ا زاوية مثلث ع ا ب القائم الزاوية انحرافا لمستوى ا س ب و ا س ح فذلك مادام عمود ب ع واقعا فى طرف س ح نظرا الخط س ا واما اذا وقع فى طرف آخر فيكون الانحراف بين المستويين المرقومين زاوية منفرجة حيث لو اضيف اليها ا زاوية مثلث ع ا ب فيحصل قائمتان * لكن حينئذ يكون انحراف مستوى ط ى هـ و ط ى و زاوية منفرجة لو ضم اليها ى زاوية مثلث ى ف هـ لحدث قائمتان وحيث لا انفكاك للتساوى عن زاويتى ا و ى يحكم بان يكون الانحراف بين مستوى ا س ب و ا س ح مساويا للانحراف بين مستوى ط ى هـ و ط ى و

تنبيه اذا تركبت المجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتناظرة مع اتحاد الوضع بين الزوايا المسطحة المتناظرة أو المتساوية فى كليهما فتصيران متساويتين واذا وضعت احداهما على الاخرى تنطبقان وقد ثبت امكان وضع ذى الاربعة الاضلاع س ا ع ح على مساويه ط ى ف و

فاذا وضع س ا على مساويه ط ى يقع س ح على ط و ونقطة ع على نقطة ف ولكن لوجود التساوى بين مثلثى ا ع ب و ى ف هـ يكون خط ب ع العمود على مستوى ا س ح عمودا على خط ف هـ العمود على مستوى ط ى و فضلا عن اتحاد جهة العمودين المرقومين فوقعت نقطة ب على نقطة هـ وخط ب س على هـ ط فمن اجل ذلك تطابقت الزاويتان المجسمتان تطابقا تاما

واما هذه المطابقة فتكون فى الزوايا المجسمة الموضوعة على نسق واحد وفى غيرها لا تكون * لان الزوايا المسطحة اذا كانت موضوعة على عكس الترتيب أو كان عمودا ع ب و ف هـ مختلفى الجهة فى محل اتحاد الجهة نظرا الى مستوى ا س ح و ى ط و فيمتنع انطباق الزاويتين المجسمتين لكن لوجود التساوى بين انحرافات

المستويات المتساوية الزوايا فلا خلل فيما ورد فى هذه الدعوى فان تطبيقها لامدخل له فى ذلك لان الزوايا المجسمة لم تزل الاقسام التى تركبت منها واالمساواة التى بينهما باقية الا انه يمتنع التطبيق بسبب عكس الترتيب وحيث ان المساواة واقعة ولكن ليست بطريق المطابقة اعنى التساوى مع اتحاد الترتيب سميت زوايا مجسمة متساوية بالتماثل

مثلا اذا تركبت الزاويتان المجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية المتناظرة وكانتا على عكس الترتيب وضعا يقال لهاتين الزاويتين المجسمتين متساويتان بالتماثل أو يقال متماثلتان واستحسن اطلاق ذلك عليهما

وماذكر فى هذا الباب لايختص بالمجسمة الثلاثية بل يجرى على ماتركبت من ثلاث الزوايا المستوية فصاعدا فاذا تركبت زاوية مجسمة من ا و ب و ح و ى و هـ الزوايا المسطحة وتركبت أخرى من ا و هـ و ى و ح و ب المرقومة عينا بعكس الترتيب فجميع الميل الذى بين المستويات المتساوية يكون متساويا ولامتناع الانطباق يسميان زاويتين مجسمتين متماثلتين

واما فى الاشكال المسطحة بوجود التماثل فلا يقع التساوى لان التساوى بينهما مطلق يعنى بالمطابقة * حيث يمكن تحويل الاشكال المسطحة الى كل وجه واما فى الاجسام فليس كذلك لان التساوى فيها اما بالمطابقة واما بالتماثل فقط

(الدعوى الرابعة والعشرون العملية)

طريق استخراج الزاوية التى بين المستويين من زاوية مجسمة معلومة الزوايا المسطحة الثلاث

مثلا (شكل ١٩٨) اذا كانت الزاوية المصمة المجسمة س وزواياها المسطحة اس ب و اس ح و ب س ح معلومة واريد استخراج الزاوية التى بين اثنتين من تلك الزوايا المسطحة مثلا اذا كانت الزاوية المطلوبة مابين مستويى اس ب و اس ح فاذا اجرى اوتصور اجراء العمل المرسوم فى الدعوى المتقدمة تكون زاوية ع ا ب هى الزاوية المطلوبة

وانما المراد اعمال هذه الزاوية عينا على سطح مستو بطريق التسطيح

فلاجل اجراء ذلك اقول اذا علمت زوايا ب َ ا و ا ح و بَ ح مساوية لزوايا ب ا و ا ح و ب ح التي في المجسمة على مستو واحد واخذ كل واحد من خطي بَ ب و بٌ ب مساويا للخط ب ب في المجسمة وأنزل عمودا بَ ا و بٌ ح من نقطتي بَ و بٌ على ب ا و ب ح فهذان العمودان يلتقيان في نقطة ع

فيرسم نصف محيط بَ ب هـ بنصف قطر ا بَ بجعل نقطة ا مركزا فاذا أخرج عمود ع ب من نقطة ع على بَ هـ يلتقي بالمحيط في نقطة ب فاذا وصل ا ب فزاوية هـ ا ب الحادثة هي الانحراف بين مستويي ا ب ح و ا ب ب المطلوب والمعنى ان مثلث ع ا ب في المسطحة يرى عين مثلث ا ع ب في المجسمة * واقيام مثلثي بَ ب ا و ب ب ا في نقطة ا وتساويهما في زاويتي ب المتقابلتين تساوي زاويتا ب و بَ ولتساوي وتري ب بَ و ب ب يلزم تساوي ذينك المثلثين وخط ب ا في المسطحة يساوي خط ب ا في المجسمة وأيضا خط ا بَ في المسطحة أو ا ب المساوي له يساوي ا ب في المجسمة وأيضا ب ح يتساوي فيهما ومن ذلك يكون الشكل ذو الاربعة الاضلاع ب ا ع ح مساويا لنفسه في كل منهما فاذا صار ا ع في المجسمة يساوي خط ا ع في المسطحة وثبت ان مثلثي ا ع ب و ا ع ب القائمي الزاوية متساويان في كليهما لتساوي وتري قائمتيهما وآحاد اضلاعهما ومن اجل ذلك ظهر ان زاوية هـ ا ب التي وجدت بطريق تسطيح الزاوية تساوي الانحراف بين مستويي ب ا ب و ب ا ح في الزاوية المجسمة وان وقعت نقطة ع بين نقطتي ا و ب تنفرج زاوية هـ ا ب وعلى اي حال لم يزل الانحراف الحقيقي بين المستويين مقدارا لها

فعلى ذلك اشير الى الانحراف بحروف هـ ا ب ولم يشر اليه بحروف ع ا ب ليعلم انه ليس له الا ذلك الاثبات في كل الوجوه

تنبيه يرد سؤال وهو اذا اخذت ثلاث زوايا مسطحة كيفما اتفق هل يمكن بها تشكيل مجسمة اولا .

فيقال اعلم انه لابد ان يكون مجموع تلك الزوايا الثلاث أصغر من أربع قوائم وماعدا هذا اذا اخذت زاويتا بَ ج ا و ا ب ج كيفما اتفق فلابد فى زاوية ج ب بً ان يكون بً ج العمود على ب ج ملاقيا قطر بَ ه ومنحصرا بين نهايتي بَ و ه فاذا أنزل منهما عمودا بَ ء و ه ك على ج ب يلتقيان بالمحيط المرسوم بنصف قطر ب بً فى نقطتى ء و ك ويكون ج ب ء و ج ب ك حدى زاوية ج ب بً وحيث ان خط ج ب المخرج فى مثلث بَ ب ء المتساوى الساقين عمود على قاعدة بَ ء تكون زاوية ج ب ء = ج ب بَ = ا ب ج + ا ب بَ ولوقوع خط ب ج عمودا على خط ه ك فى مثلث ه ب ك المتساوى الساقين تكون زاوية ج ب ك = ج ب ه ولتساوى مثلثى ا ب ه و ا ب بَ تصير ا ب ه = ا ب بَ فتكون ج ب ه أو ج ب ك = ا ب ج — ا ب بَ

وقد ظهر من هذا ان زاوية ج ب بً الثالثة مادامت أصغر من مجموع ا ب ج و ا ب بَ الاخريين واكبر من التفاضل بينهما يمكن اجراء عمل هذه الدعوى كما صرح به فى الدعوى الحادية والعشرين حيث ذكر فى خواصها أنه لابد ان يكون ج ب بً $<$ ا ب ج + ا ب بَ و ا ب ج $<$ ج ب بً + ا ب بَ أو ج ب بً $>$ ا ب ج — ا ب بَ فتامل

(الدعوى الخامسة والعشرون العملية)

طريقة استخراج الزاوية المسطحة الثالثة من زاوية مجسمة علم منها السطحان والانحراف الذى بينهما

(شكل ١٩٨) اذا كانت الزاويتان المعلومتان ا ب ج و ا ب بَ وفرضت الزاوية المطلوب استخراجها ج ب بً فاذا اجرى العمل الذى فى الدعوى السابقة فزاوية ه ا ب تكون هى الانحراف الذى بين الاولين وكما يستخرج

بواسطة

بواسطة حسـَ زاوية هاب والمستويان الآخران معلومان كذلك يمكن استخراج حسـَ بواسطة هاب وبه تحل الدعوى

فيؤخذ سَـ س كيفما اتفق وينزل عمود ـ هـ الغير المحدود على سـا وتعمل زاوية هاب مساوية لما بين المستويين المعلومين ومن نقطة ب ملتقى المحيط المرسوم بنصف قطر اسَ من مركز ا نهاية ضلع اب ينزل عمود ب ع على اهـ ومن نقطة ع ينزل عمود ع حَ الغير المحدود على سـح وينتهى الى نقطة سَ بان يكون سـَ = سـَ فزاوية حسـ هى الزاوية المسطحة المطلوبة

لانه لو رسمت زاوية مجسمة بالثلاث زوايا المسطحة سَـا و اسـح و حسـَ لوجد الانحراف الذى بين مسطحى اسـَ و اسـح المعلومتين مساويا لزاوية هاب المعلومة

تنبيه (شكل ١٩٩) اذا تصورت زاوية مجسمة ذات أربع وجوه اى تصورت من اسـ و سـح و حسـد و دسـا الزوايا المسطحة فلاجل تحديد انحرافات هذه المستويات لا يكتفى بكونها معلومة

لانه يمكن ان يرسم بهذه السطوح الاربع زوايا مجسمة متعددة لكن اذا زيد على ما ذكر شرط وهو ان يكون الانحراف بين مستويى اسـ و سـح معلوما تتعين الزاوية المجسمة ويتعين كل انحراف واقع بين اى مستويين

فاذا تصورنا تشكيل مجسمة ذات وجوه ثلاثة من الزوايا المسطحة اسـ و سـح و اسـح وكان الاولان وما بينهما من الانحراف معلوما تتعين اسـح الثالثة بما صرح به من الحل فى هذه الدعوى ثم ترى الاخرى تركبت من اسـح و اسـد و دسـح الثلاث زوايا المسطحة المعلومة ومتى كانت الزوايا الثلاث المرقومة معلومة تصير المجسمة محدودة

وحيث تبين تحديد الزاوية الثلاثية المجسمة تتعين المجسمة الرباعية لانها تنقسم الى ثلاثيتين

واما زاوية مستوى اسد و دسح فتتعين بواسطة الزاوية المجسمة الثانية الجزئية واما الزاوية الكلية التى بين مستوى بسح و حسد فتساوى مجموع مابين مستوى اسح و دسح ومابين مستوى اسح و بسح الجزئيين

وكذا يقال فى المجسمة التى لها خمسة اوجه فلا بد من تعيين اثنين من انحرافاتها فضلا عن ان تكون زواياها المسطحة معينة وكذلك فى المجسمة التى لها ستة اوجه فلا بد فيها من ثلاثة انحرافات معلومة فضلا عن ان تكون زواياها المسطحة معينة وهكذا على التوالى يجرى العمل المذكور

(المقالة السادسة)

فى بيان الاجسام المحاطة بسطوح مستوية

الحدود

حد ١ كل جسم محاط بسطوح مستوية يسمى كثير السطوح أو كثير القواعد وهذه السطوح لابدان تحاط بخطوط مستقيمة وتكون وجوها الكثير السطوح فنها ما كان له اربعة أوجه ويسمى ذا اربع قواعد وماله ستة يسمى ذا ست قواعد وماله ثمانية يسمى ذا ثمان قواعد وماله ثناعشر يسمى ذا اثنى عشرة قاعدة وماله عشرون يسمى ذا عشرين قاعدة

ذو الاربعة القواعد هو مجرد كثير السطوح * لان الزاوية المجسمة أقل ما يلزم لتشكيلها ثلاثة مستوية ويبقى انفتاح فلاجل انغلاقه احتيج الى رابع مستو

٢ الفصل المشترك بين وجهى كثير السطوح يسمى ضلعا أوحدا أوحرفا

٣ الجسم الذى جميع وجوهه اشكال مستقيمة الاضلاع منتظمة متساوية وجميع زواياه المجسمة متساوية يسمى كثير القواعد المنتظم وعددها خمسة اشتهرت بالاشكال الافلاطونية وقد ذكرت فى ملحقات المقالة السادسة والسابعة فتامل

٤ المنشور ما احيط بسطوح متوازية الاضلاع وكان طرفاه محدودين بشكلين مستقيمى الاضلاع متساويين ومتوازيين

(شكل ٢٠٠) مثلا لاجل رسم هذا المنشور اذا كان ا ب ج د هـ اى شكل مستقيم الاضلاع ورسمت خطوط ود و رح و ح ط الخ متساوية ومتوازية لاضلاع ا ب و ب ج و ج د الخ فى مستو مواز لمستوى ا ب ج الخ فالشكل الحادث ور ح ط ى يكون مساويا للشكل ا ب ج د هـ المستقيم الاضلاع المرقوم فاذا وصلت رؤس الزوايا المتناظرة من هذين الشكلين بخطوط او و ب ر و ج ح الخ يصير جسم ا ب ج د هـ و ر ح ط ى المحاط بوجوه ا ب ر و و ب ج ح ر الخ المتوازية الاضلاع منشورا

٥ الشكلان المستقيما الاضلاع ا ب ج د هـ و ور ح ط ى يسميان قاعدتى المنشور وجميع السطوح المتوازية الاضلاع الاخر تسمى وجوه المنشور وخطوط او و ب ر و ح ج الخ المستقيمة المتساوية تسمى اضلاع المنشور

٦ ارتفاع المنشور هو البعد الذى بين القاعدتين أو العمود النازل من نقطة من القاعدة العليا على القاعدة السفلى

٧ اذا كانت اضلاع المنشور او و ب ر و ح ج الخ عمادا على مستوى القاعدة فهو قائم وكل واحد منها حينئذ يساوى الارتفاع والا فهو مائل ويكون ارتفاعه اصغر من ضلعه

٨ المنشور الذى تثلثت قاعدته يسمى مثلثيا وما تربعت قاعدته يسمى مربعيا وما تخمست قاعدته يسمى مخمسيا وما تسدست قاعدته يسمى مسدسيا وهكذا

٩ (شكل ٢٠٦) اذا كانت قاعدة المنشور متوازى الاضلاع وكانت كافة وجوهه ايضا متوازية الاضلاع يسمى متوازى السطوح وهو ما حصل من احاطة ستة اشكال متوازية الاضلاع وان كانت وجوه متوازى السطوح مستطيلة يسمى متوازى المستطيلات

١٠ متوازى المستطيلات اذا تركب من احاطة ست مربعات متساوية يسمى مكعبا أو ذا ست قواعد منتظمة

١١ (شكل ١٩٦) الاهرام جسم حاصل من احاطة مستويات مثلثية خرجت من نقطة س وانتهت الى جميع اضلاع مستوى ا ب ج د هـ المستقيم الاضلاع ويسمى قاعدة الاهرام ونقطة س تسمى رأس الاهرام ومجموع مثلثات ا س ب و ب س ج الخ يسمى اجنحة الاهرام أو سطوحه المضلعة أو كافة وجوه الاهرام

١٢ ارتفاع الاهرام هو العمود النازل من رأسه على قاعدته أو على المستوى الممتد منها

١٣ الاهرام الذى تثلثت قاعدته يسمى مثلثيا والذى تربعت قاعدته يسمى مربعيا وهلم جرا انظر الى قاعدته

١٤ اذا كانت قاعدة الاهرام شكلا مستقيم الاضلاع منتظما وكان العمود

النازل من رأسه على قاعدته يمر بمركز مستوى القاعدة يسمى هذا الاهرام منتظما وحينئذ يسمى هذا العمود محورا

١٥ قطر كثير القواعد او كثير السطوح هو الخط المستقيم الواصل بين رأسى الزاويتين المجسمتين غير المتجاورتين

١٦ كثيرا السطوح المتماثلان هما جسمان واقعان على قاعدة مشتركة أحدهما فوق القاعدة والآخر تحتها ومرسومان على سياق واحد مع وقوع زواياهما المجسمة المتناظرة على الخطوط المستقيمة العماد على مستوى القاعدة الموضوعة على ابعاد متساوية منه

مثلا (شكل ٢٠٢) اذا كان خط سط المستقيم عمودا على مستوى ا ب ح ومنقسما بتساوين فى نقطة و ملتقا بذلك المستوى فشكلا س ا ب ح و ط ا ب ح كثيرا السطوح الواقعان على القاعدة المشتركة يتماثلان

١٧ الاهرامان المثلثيان اذا تشابه منهما مثنى الوجوه على التناظر وتماثل فيهما الوضع وتساوى فيهما الميل فهما متشابهان

(شكل ٢٠٣) مثلا اذا كانت زاوية ا ب ح = د هـ و وزاوية ب ا ح = هـ د و وزاويه ا ب س = د هـ ط وزاوية ب ا س = هـ د ط فى وجهى اهرامى ا ب ح س و د هـ و ط فضلا عن ان يكون الميل بين مستويى ا ب س و ا ب ح مساويا للانحراف بين مستويى د هـ ط و د هـ و فالاهرامان المرقومان يتشابهان

١٨ اذا رسم مثلث بوصل ما بين ثلاث نقط ماخوذة على وجه من كثير السطوح أو على قاعدته وجعل المثلث المرقوم قاعدة مشتركة وتصور فى الذهن وجود اهرامات بعدد رؤس الزوايا المجسمة التى لم تكن على مستوى تلك القاعدة فكل واحد من هذه الاهرامات يعين وضع كل زاوية مجسمة كانت فى كثير السطوح نظرا الى القاعدة

فاقول اذا تشابهت قاعدتا كثيرى السطوح وتعينت رؤس الزوايا المجسمة المتناظرة فيهما باهرامات مثلثية متشابهة متناظرة فهما متشابهان

١٩ نقط رؤس الزوايا المجسمة من كثير السطوح تسمى رؤس كثير السطوح
اعلم ان ماذكر من كثير السطوح فى هذا الباب هو ما كانت جميع زواياها مستخرجة وهو المحدب وقد ذكر تعريفه فى السطوح بما لا يقطعه المستقيم الا فى نقطتين فقط فكذلك ما كان ههنا من الاجسام الكثيرة السطوح فانه اذا امتد احد وجوهه فلا يقطع جسمه ابدا ولا يمكن وقوع جزء من الجسم فوق ما احاطه من مستو والآخر تحته فلذا تمام الجسم يقع فى احدى جهتى المستوى الذى يحيط به

(الدعوى الاولى النظرية)

كثيرا السطوح لا يمكن اتحادهما عددا ولا تكون رؤسهما اعينا ما لم ينطبقا فاذا فرض وجود احد كثيرى السطوح حاضرا وأريد اعمال آخر له رؤس كرؤسه متحدة فى العدد فلا بد ان يمر كل مستو مما يراد اعماله بعين نقط كل مستو مما كان حاضرا والا لزم التخالف بينهما ولكن ان لم يمر كل مستو من ذات تلك النقط فيقتضى ان تكون المستويات المرقومة تقطع كثير السطوح الاول وتكون رؤسه بعضها فوق المستويات القاطعة وبعضها تحتها وهذا بخلاف ماذكر فى المحدبة فلذا وجب انطباق كثيرى السطوح واتحاد زواياهما عينا وعددا

تنبيه رسم كثير السطوح من نقط ا و ب و ح و ك الخ رؤسه المعينة المنظورة معلومة وكذا اضلاعه لا عسرة فيه

اولا (شكل ٢٠٤) فاذا انتخبت ثلاث نقط د و هـ و ح متجاورات ومر منها بمستوى دهح فكذلك يمر بنقطتى ك و ح الاخريين ولا بد ان يكون جميع تلك النقط واقعة فى احد طرفى مستوى دهح أو دهح ك و فيكون احد وجوه الجسم الكثير السطوح

ثانيا اذا مر بمستو آخر على ضلع هـ ح احد اضلاع ذلك المستوى ودور حتى صادف نقطة و الاخرى أو نقطتى و و ط فمستوى وهح أو وهح ط يكون الوجه الثانى من كثير السطوح وهلم جرا حتى يتم رسمه فهذا هو كثير

السطوح

السطوح المطلوب لانه لا يكون جسمان اثنان مع اتحاد الرؤس

(الدعوى الثانية النظرية)

فى كثيرى السطوح المتماثلين تكون الوجوه المتناظرة متساوية والميل والانحراف بين كل اثنين متجاورين من الوجوه فى احدهما مساويا لنظيره فى الآخر

(شكل ٢٠٥) مثلا اذا كان مستوى ا ب ح ء ه قاعدة مشتركة بين كثيرى السطوح وكانت نقطتا م و ن زاويتى احدهما الجسمتين و مَ و نَ نظيرتيهما فى الآخر فعلى ما ذكر فى تعريف التماثل يصير خطا ممَ و ننَ عمودين على مستوى ا ب ح وينقسمان بمتساويين فى نقطتى ك و ل ملتقيهما بالمستوى المرقوم فاذا كان الامر كما ذكر يصير بعد م ن مساويا لبعد مَ نَ لانه اذا دور شبه منحرف كمَنَل حول كل حتى ينطبق على مستوى كم ن ل فضلع كمَ ينطبق على مساويه كم ويقع ضلع لنَ على لن وذلك لقيام زاويتى ك و ل ولتساوى تلك الاضلاع يتحدان فلذا صار م ن = مَ نَ لمطابقة شبهى المنحرف تماما وايضا يصير م س = مَ سَ و ن س = نَ سَ كما ثبت آنفا التناظر بجسمة س العليا الجسمة سَ السفلى فاى مثلث مثل م ن س حاصل بوصائل رؤس الجسمات العليا يساوى مثلث مَ نَ سَ الحادث بوصائل السفلى ومن هذه المثلثات المرقومة اذا نظر الى ما كان مشكلا فى وجوه كثير السطوح خاصة يتبين ان تلك الوجوه تركبت من مثلثات متساوية متناظرة قد اتحد عددها ومن المثلثات المرقومة ما اذا وقعت على مستو واحد وتشكل منها وجه من كثير السطوح فنظائرها من المثلثات بهاتشكل وجه كثير السطوح الآخر النظير للاول

فاذا فرض ان مثلثى م س ن و ن س و المتجاورين فى مستو واحد وكان مثلثا مَ سَ نَ و نَ سَ وَ نظيرى الاولين تكون زاوية م ن س = مَ نَ سَ

وزاوية س ه و = سَ هَ وَ فاذا وصل م و و مَ وَ فمثلث م ه و
يساوى مثلث مَ هَ وَ فزاوية م ه و = مَ هَ وَ ولكن حيث ان شكل
م س ه و واقع على مستو واحد تكون زاوية م ه و = مجموع م ه س
+ س ه و وايضا مَ هَ وَ = مَ هَ سَ + سَ هَ وَ فان لم تختلط مَ هَ سَ
و سَ هَ وَ و وَ هَ مَ وتصير مستويا واحدا حدث منها زاوية مجسمة
واذا الزم ان تكون زاوية مَ هَ وَ < مَ هَ سَ + سَ هَ وَ (٢٠ مقالة ٥)
وهذا محال * لانه قد ثبت ان زاوية مَ هَ وَ = مَ هَ سَ + سَ هَ وَ والتساوى
وعدمه بين كميتين ممتنع فوجب وقوع مثلثى مَ هَ سَ و سَ هَ وَ على
مستو واحد
فقد ظهر من هذا الاثبات ان الاشكال كثيرة السطوح المتماثلة تصور بمستويات
متناظرة متحدة العدد متوافقة متساوية سواء كانت تلك المستويات مثلثية
اواى شكل مستقيم الاضلاع اما الشق الاول من هذه الدعوى فقد ثبت واما
تساوى الانحرافات المتناظرة فاثباته سيأتى
مثلا اقول ان مثلثى م س ه و ه س و مرسومان فى مستويى وجهى كثير
السطوح المتجاورين على ه س الحرف المشترك ومثلثا مَ سَ هَ و هَ سَ وَ
مناظران لهما وحيث يمكن تصور تشكيل زاوية مجسمة فى نقطة ه بمسطحات
م ه و و م ه س و س ه و الثلاثة واخرى فى نقطة هَ بسطوح مَ هَ وَ
و مَ هَ سَ و سَ هَ وَ الثلاثة الاخر وقد ثبت تساوى هذه المسطحة على التناظر
كما فى الشق الاول من هذه الدعوى فعلم ان الانحراف بين مستويى م ه س
و س ه و مساو للانحراف بين مستويى مَ هَ سَ و سَ هَ وَ نظيريهما
(٢٢ مقالة ٥) فعلم من الشطر الاول والثانى من هذه الدعوى ان كل جسمين
كثيرى السطوح متماثلين تكون وجوههما المتناظرة متساوية ويكون كل
انحراف بين مستويى وجهى احدهما مساويا لنظيره فى الآخر
تنبيه تتماثل كل زاويتين مجسمتين متناظرتين من هذين الجسمين * لان زاوية ه

المجسمة كما رسمت بمستويات م ى س و س ى و وى ر الخ
فكذلك زاوية ىَ نظيرتها تشكلت بمستويات مَ ىَ سَ و سَ ىَ وَ و وَ ىَ رَ
الخ فكانت مجسمة ى وقعت على وضع ترتيب الاخرى ولا تزال مماثلة للاخرى
وان كانت مقلوبة الوضع نظرا للاخرى وذلك لتساوى الانحرافات المتناظرة
على التوالى (مقاله ٥ تنبيه ٢ ٣)
فقد ظهر من هذا التنبيه ان كثير السطوح لا يماثله الا واحد فقط * لانه لو انشئ له
مثيل آخر على قاعدة اخرى لتساوت جميع ابعاده بابعاد المثيل الاول مع اتحاد
الوضع فيهما واذا الصار عينه

(الدعوى الثالثة النظرية)

يتساوى المنشوران اذا تركبت آحاد زواياهما المجسمتان من ثلاث سطوح
متساوية بالتناظر مستوية متشابهة الوضع

(شكل ٢٠٠) مثلا اذا كان فى المستويات التى احاطت زاويتى ب و بَ
المجسمتين قاعدة ا ب ح د هـ مساوية لقاعدة اَ بَ حَ دَ هَ ومتوازى الاضلاع
ا ب ر و مساويا لمتوازى الاضلاع اَ بَ رَ وَ ومتوازى الاضلاع ب ح ح ر
مساويا بالمتوازى الاضلاع بَ حَ حَ رَ يكون منشور ا ب ح ط مساويا لمنشور
اَ بَ حَ طَ

لانه اذا وضعت قاعدة ا ب ح د هـ على مساويتها اَ بَ حَ دَ هَ فينطبقان تماما
وحيث ان الزوايا المسطحة الثلاث التى تحيط بزاوية ب المجسمة مساوية
لنظائرها التى تحيط بزاوية بَ يعنى ا ب ح = اَ بَ حَ و ا ب ر = اَ بَ رَ
و ر ب ح = رَ بَ حَ ولتشابه الوضع كانت زاويتا ب و بَ المجسمتان
متساويتين ومن ثمة يقع ضلع ب ر على مساويه بَ رَ ويلزم من تساوى
متوازيى الاضلاع ا ب ر و و اَ بَ رَ وَ ان يقع ضلع ر و على ضلع رَ وَ وايضا
ضلع ر ح على ضلع رَ حَ ولوجود التساوى بين قاعدتى المنشورين السفليين

يلزم التساوى بين قاعدتيهما العليين ولمطابقة مثنى الاضلاع من قاعدتيهما العليين لزم انطباقهما كليا اعنى ان تكون قاعدة ورح طـ العليا منطبقة على قاعدة وَرَحَ طَ الاخرى تماما فعلى هذا صار الجسمان المرقومان متحدى الرؤس عددا وعينا وصارا جسما واحدا (الاولى)

نتيجة يتساوى المنشوران القائمان اذا تساوت منهما القاعدة والارتفاع لانه من تساوى القاعدتين يلزم ان يكون ضلع اب مساويا بالضلع اَبَ وحيث فرض تساوى ارتفاع بر بارتفاع بَرَ فمستطيل ابرو يساوى مستطيل اَبَرَوَ وايضا مستطيل برحه يساوى مستطيل بَرَحَهَ فالثلاثة المستوية المحيطة بزاوية ب ساوت الثلاثة المحيطة بزاوية بَ فعلى منطوق الدعوى صار المنشوران المرقومان متساويين

(الدعوى الرابعة النظرية)

فى كل جسم متوازى السطوح المستويان المتقابلان متساويان ومتوازيان * فعلى تعريف هذا الجسم حيث ان قاعدتيه ابحد و هورح متوازيا الاضلاع متساويان واضلاعهما متوازية وبهذا يثبت تساوى وتوازى الوجوه المتطرفة نحو اهحد و بورح المتقابلين الواقعة بين تينك القاعدتين ولتوازى اضلاع شكل ابحد يكون ضلع اد مساويا وموازيا الضلع بح وايضا لتوازى اضلاع شكل ابوه يصير ضلع اه موازيا ومساويا بالضلع بو فلذا كانت زاوية داه مساوية لزاوية حبو (١٣ مقالة ٥) ومستوى داه موازيا لمستوى حبو فيكون متوازى الاضلاع داهح مساويا لمتوازى الاضلاع هب ور وكذا يثبت تساوى وتوازى متوازيى الاضلاع ابوه و دورح الاخيرين وبه ثبت المطلوب

نتيجة حيث ان متوازى السطوح قد احيط بستة مستويات منها كل اثنين متقابلين متوازيان ومتساويان قد أمكن اتخاذ أى وجه من وجوهه أو مقابله قاعدة له

تنبيه ا ب و ا ه و ا ء ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة تمر بنقطة ا وتحدث بينها زوايا معلومة يمكن ان يرسم بها جسم متوازى السطوح ويحصل ذلك برسم مستويات من نهاية كل من تلك الخطوط بان يكون كل مستو مر من نهاية احدها موازيا للمستوى المار من الآخرين مثلا اذا مر بمستو من نقطة ب موازلمستوى ءاه ومن نقطة ء بمستوموازلمستوى ب اه ومر من نقطة ه بمستوموازلمستوى ب اء فالمتوازى السطوح المطلوب يتصور ويتشكل من احاطة هذه المستويات المتلاقية

(الدعوى الخامسة النظرية)

فى كل جسم متوازى السطوح الزاويتان المجسمتان المتقابلتان متماثلتان والقطران الواصلان بين رؤس تلك الزوايا يقطعان تنصيفا

(شكل ٢٠٦) أولا اذا تقدرت زاوية ا المجسمة بزاوية ر المقابلة لها اقول حيث ان زاوية ه اب مساوية لزاوية ه و ب ولزاوية ح ر ح وايضا زاوية ءاه = ءحه = حر و وايضا زاوية ءاب = ءوب = ح ر و فصارت كل واحدة من الزوايا المسطحة التى تحيط بزاوية ا المجسمة مساوية لكل واحدة من نظائرها التى تحيط بزاوية ر المجسمة الاخرى مع مخالفة الوضع فلذا صارت زاويتا ا و ر المجسمتان متماثلتين (٢٣ مقاله ٥)

ثانيا اذا وصل ار و هح بين الرؤس المتقابلة على ان يكونا قطرين فلوجود التساوى والتوازى بين خطى اه و حر يكون شكل اهرح متوازى الاضلاع فلذا يتقاطع قطرا هح و ار على التساوى وكذا قطرا هح و ءو ومن ثمة ظهر ان الاقطار الاربعة فى متوازى السطوح ينصف بعضها بعضا فى نقطة واحدة وهذه النقطة كانها مركز لذلك الجسم

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ٢٠٧) مستوى ب ءح و المار بحرفى ب و و ءح المتقابلين المتوازيين فى اى متوازى السطوح نحو ا ب ح ء ه و ر ح يقسم ذلك الجسم الى

منشورين مثلثيين متماثلين نحو ا ـ د ح هـ و ، ر ح و ـ ح د

أولاهذان الجسمان يكونان منشورين * لان مثلثي ا ـ د ، هـ و ح متساويان لتساوي وتوازي اضلاعهما ثانيا حيث ان الوجوه المتطرفة ا ـ و هـ ، ا د هـ ح و ـ د ح و متوازية الاضلاع فالجسمان المرقومان يكونان منشورين متماثلين *

لان منشور ا ـ د هَ وَ حَ يرسم على قاعدة ا ـ د بان يكون مماثلا لمنشور ا ـ د هـ و ح ومستوى ا ـ وَ هَ مساو لمستوى ا ـ و هـ لما صرح به في الدعوى الثانية وكذا مستوى ا د حَ هَ مساو لمستوى ا د ح هـ واذا صار التقدير بين منشوري ر ح و ـ ح د ، ا ـ د حَ هَ وَ تكون قاعدة ر ح و مساوية لقاعدة ا ـ د ومتوازي الاضلاع ر ح د ح يساوي ا ـ و هـ ، ا ـ وَ هَ وأيضا متوازي الاضلاع ر و ـ ح يساوي متوازي الاضلاع ا د ح هـ ومساويه ا د حَ هَ وحيث ان المستويات الثلاث المحيطة بزاوية ر المجسمة في منشور ر ح و ـ ح د تساوي نظائرها الثلاث التي تصور زاوية ا المجسمة في منشور ا ـ د حَ هَ وَ ولتشابه الوضع في كل منهما يتساوى ذانك المنشوران تطابقا ولتماثل ا ـ د حَ هَ وَ أحد هذين المنشورين بمنشور ا ـ د ح هـ و يكون ر ح و ـ ح د المنشور الآخر مماثلا لمنشور ا ـ د ح هـ و ويثبت المطلوب

(الدعوى السابعة النظرية)

(شكل ٢٠١) في كل منشور مّا ا ـ ح ط مقاطع ك ل م ن س ، ع ف ص ق ر الحادثة من المستويات المتوازية تكون اشكالا مستقيمة الاضلاع متساوية

لان ضلعي ك ل ، ع ف المتوازيين فصلان مشتركان بين المستويين المتوازيين وبين ا ـ د و المستوى الثالث ولوقوعهما بين ضلعي المنشور ع ك ، ف ل يكون شكل ع ك ل ف متوازي الاضلاع فلذا صار ك ل = ع ف وبمثل هذا يثبت ان ل م ، م ن ، ن س الخ اضلاع مقطع

كلمدس تساوى فصه و صهو و وس الخ اضلاع مقطع
ع ف صه وس على التوالى ولوجود التوازى بين هذه الاضلاع فضلا عن
التساوى تكون كلم و لمد الخ زوايا المقطع الاول تساوى ع ف صه
و ف صه و الخ زوايا المقطع الثانى على التوالى ومن ثمة ظهران الاضلاع
والزوايا من مقطعى كلمدس و ع ف صه وس صارت متساوية على
التناظر وثبت المطلوب من أن يكونا متساويين
نتيجة كافة المقاطع التى أنشئت موازية لقاعدة المنشور تكون مساوية لها

(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ٢٠٨) المنشوران المثلثيان المتماثلان ا ـ دح هو و ـ ح د و ر ح
المركب منهما اى متوازى السطوح ار هما متكافيان
فاذا رسم مستويا ـ أدَحَ وهَحَرَ من رأسى ـ و عمادا على ضلع ـ و
فيلتقيان باضلاع اهو دح و حر الثلاثة من المنشور المرقوم بنقط أ وَدَ و حَ
فى أحد طرفيه وبنقط هَ وحَ و رَ فى طرفه الآخر وحيث ان مقطعى ـ أدَحَ
و وهَحَرَ عمادا على مستقيم واحد يكونان متوازيين وبما صرح به فى الدعوى
التى تقدمت يكونان متساويين وان أَـ و دَحَ ضلعى أحدهما المتقابلين
فصلا مشتركان بين مستويى ا ـ وه و د ح ر ع المتوازيين وبين المستوى
الآخر فيكون كل واحد من المقطعين متوازى الاضلاع وكذا يثبت ان يكون
شكل ـ أهَوَ متوازى الاضلاع ولتوازى اضلاع وجوه ـ ورحَ و حدَحَرَ
و أدَحَهَ المتطرفة الاخر من جسم ـ أدَحَ و وهَحَرَ يكون منشورا
(حد ٤) وقائما لوقوع ضلع ـ و عمودا على قاعدتيه *فاذا قسم منشور
ـ حَ القائم بمستوى ـ وح د الى منشورين مثلثين قائمين أ ـ دهَوحَ
و ـ دَحَوحَرَ فالمنشور المثلثى ا ـ دهوح المائل يكافى منشور أ ـ دَهَوحَ
المثلثى القائم وحيث ان قسم ا ـ دح هو مشترك بينهما فحسبك اثبات
التساوى بين القسمين الآخرين اعنى ـ أ أ دَ و هَ هـ ح حَ فاقول

حيث ان وجهى اـوه و اَـوَهَ متوازيا الاضلاع والتساوى كل من ضلعى اهَ و اهَ بضلع ـو الموازى لهما فيكونان متساويين فاذا طرح منهما اهَ المشترك يبقى اَا = ههَ وبهذا يثبت ان يكون ءءَ = حَ حَ وان تصور تطابق جسمى ـ اأءءَ و ههَ ح حَ بان تأتى قاعدة وهَحَ على مساويتها ـاءَ فتقع نقطة هَ على نقطة أ ونقطة حَ على ءَ وضلعا هَه و حَح على مساويهما اَا و ءءَ * لان هذه الاضلاع عماد على مستوى ـاءَ نفسه فعلى هذا ينطبق الجسمان المرقومان اتحادا ومنشور ـ اءوهح المائل يكافى منشور ـ اَءَوَهَحَ القائم

واما اثبات تكافى منشورى ـ ءحوحر و ـ ءَحَوَحَرَ القائم والمائل فكما ذكر واما المنشوران القائمان ـ اَءَوَهَحَ و ـ ءَحَوَحَرَ فتساويان لتساوى قاعدتيهما ـ اَءَو ـ ءَحَ حيث انهم انصاف متوازى اضلاع واحد ولاشتراك ارتفاع ـ و بينهما (نتيجة ٣) فيلزم من مكافئة منشورى ـ اءوهح و ـ ءحوحر المثلثين للمنشورين المتساويين ان يكونا متقاومين ويثبت المطلوب

نتيجة كل منشور اـ ءحهو المثلى المنشأ على زاوية ا المجسمة وعلى حروف اـ و اء و اه المضلعة من متوازى السطوح ار يكون نصفه

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ٢٠٩) اذا كان متوازيا السطوح ار و ال على قاعدة اـ حء المشتركة وكانت قاعدتاهما العليا هورح و طكلم فى مستو واحد ومنحصرتين بين خطى هك و حل المتوازيين فذانك الجسمان يكونان متكافئين * وهى على ثلاثة أحوال الاول اما ان يكون خط هط أ كبر من خط هو اومساويا له أو أصغر منه و برهان الكل واحد

أولا منشور اهطءحم المثلى مساو لمنشور ـوكحرل المثلى * لان خط اه مساو لخط ـو وخط حه مساو لخط رو وزاوية اهط = ـوك وزاوية حهط = روك وزاوية حها = روـ فالثلاثة الاول

من هذه الستة المسطحة تصوروزاوية هـ الجسمة والثلاثة الاخر تصوروزاوية و المجسمة الاخرى وهما متساويتان حيث تشكلتامن مستويات متناظرة متساوية تشابهت أوضاعها * فاذا توهم تطبيق منشور اهم على منشور سول ووضع قاعدة اهط على قاعدة سوك فهاتان القاعدتان ينطبقان لما بينهما من التساوى ولوقوع ضلع هح على مساويه ور اتساوى مجسمتى هـ و ينطبق أحد المنشورين على الآخر فى جميع الامتداد ولا حاجة لبرهان غير هذا * لانه كما تعين منشور اهم بقاعدة اهط وحرف هح أيضا يتعين منشور سول بقاعدة سوك وحرف ور (٣) فلهذا يثبت تساوى المنشورين فاذا طرح من جسم ال منشور اهم يبقى متوازى السطوح اطل وان طرح منه منشور سول يبقى متوازى السطوح اهر ومن أجل ذلك تبين التكافى بين الجسمين اطل و اهر متوازيى السطوح وثبت المطلوب

(الدعوى العاشرة النظرية)

الاجسام المتوازية السطوح المتحدة القاعدة والارتفاع تكون مكافئة (شكل ٢١٠) مثلا اذا كانت قاعدة اسحد مشتركة بين متوازيى السطوح ار و لا فلاتحاد الارتفاع فيهما تكون قواعدهما العليا هورح و طسلم على مستو واحد فضلا عن أن يكون ضلعا هو و اسـ متوازيين متساويين وكذا ضلعا طسـ و لم فيصير خط هو موازيا لخط طسـ ومساوياله وبمثل هذا يثبت التوازى والتساوى بين خطى رو و لسـ فاذا امتد ضلعا هو و حر وضلعا لسـ و طم على الاستقامة حتى يحدث بالتقائهم وتقاطعهم متوازى الاضلاع ثع سك يكون مساويا لكل من قاعدتى هورح و طسلم كما لا يخفى فاذا تصور متوازى سطوح ثالث آخر وقاعدته السفلى اسحد والعليا ثع سك فهذا الجسم المتصور يكافى متوازى السطوح ار (٩) لاتحاد قاعدتيهما السفليين واستواء قاعدتيهما العليين على مستو واحد محصورتين بين خطى وك و ثق المتوازيين وبمثل هذا ثبت تكافى

متوازى السطوح الثالث المرقوم لمتوازى السطوح ال ومن ثمة تبين تكافى متوازيى السطوح ار و ال وثبت المطلوب

(الدعوى الحادية عشرة النظريه)

كل متوازى السطوح يمكن تحويله الى متوازى المستطيلات المكافى له الذى ارتفاعه عين ارتفاعه وقاعدته مقاومة لقاعدته

(شكل ٢١٠) اذا فرض ان كثير السطوح المفروض ار ورسم متوازى السطوح ال باقامة عماد اط و ب ى و حل و دم على مستوى القاعدة من نقط ا و ب و ح و د مقاوما لمتوازى السطوح ار تكون وجوه ى و ل الخ اطراف متوازى السطوح المرسوم مستطيلة فان كانت قاعدته ا ب ح د مستطيلا صار جسم ال متوازى المستطيلات مكافيا لمتوازى السطوح المفروض ار هذا * وان لم تكن قاعدة ا ب ح د مستطيلا

(شكل ٢١١) فاقول اذا انزل عمودا او و ب ه على ح د واخرج عمودا و ك و ه س على القاعدة فجسم ا ب ه و ط ى س ك الحادث يكون متوازى المستطيلات * لان قاعدتيه ا ب ه و و ط ى س ك المتقابلتين مستطيلان متساويان وحيث ان ا ط و و ك الخ حروف الوجوه المتطرفة عماد على مستوى القاعدة تحققت استطالة الوجوه وثبت ان يكون جسم اس متوازى المستطيلات ومكافئته لمتوازى السطوح ال لاتحاد قاعدة ا ب ط وارتفاع او فيهما (١٠) ومن قبل قد تحول متوازى السطوح ار الى متوازى السطوح ال مكافئا ثم تحول الى متوازى المستطيلات اس الذى قاعدته ا ب ه و مقاومة لقاعدة ا ب ح د وارتفاعه اط عين ارتفاعه ومن ثمة ثبت المطلوب من امكان تحويل متوازى السطوح الى جسم متوازى المستطيلات المكافى له

(الدعوى الثانية عشرة النظريه)

(شكل ٢١٢) متوازيا السطوح ار و ال الواقعان على نفس قاعدة ا ب ح د

النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما اه و اط

أولا اذا فرض ان نسبة الارتفاعين كنسبة عدد ١٥ الى عدد ٨ فحينئذ ينقسم ارتفاع اه الى خمسة عشر جزأ متساوية يحتوى ارتفاع اط على ثمانية منها فاذا امر بمستويات موازية للقاعدة من نقط التقسيم ى و ص و ق الخ فهذه المستويات تقسم جسم ار الى خمسة عشر عددا متوازى السطوح وهى متساوية لتساوى قاعدتها والارتفاع فتساوى القواعد ظاهر لما ذكران المقاطع مثل م ط ك ل الموازية للقاعدة فى منشور تكون متساوية (٧) واما تساوى الارتفاع فلتساوى ا ى و ص ى و ص ق اقسام الارتفاع فلذا تساوت متوازية السطوح الخمسة عشر ومتوازى السطوح ال يحتوى على ثمانية منها ومن ثمة كانت نسبة جسم ار الى جسم ال كنسبة عدد ١٥ الى عدد ٨ أو كنسبة ارتفاع اه الى ارتفاع اط

الصورة الثانية وان لم يحتو ارتفاعا اه و اط على عدد صحيح فلا تزال أيضا نسبة جسم ار : جسم ال :: اه : اط هذا * فان قيل ان ذلك التناسب ليس بحاله وفرض كون نسبة ار : ال :: اه : اع فينقسم خط اه الى أقسام متساوية يكون كل واحد منها أصغر من مقدار ط ع فاقل ما يقع من نقط التقسيم بين ط و ع نقطة س فاذا سمى متوازى السطوح الذى قاعدته ا ب ج د وارتفاعه اس * ف * ومن كون النسبة بين ارتفاعى اه و اس كالنسبة بين العددين الصحيحين تكون نسبة جسم ار الى جسم ف كنسبة اه الى اس وقد زعم ان جسم ار : ال :: اه : اع فيصدر عنهما هذا التناسب وهو ال : ف :: اع : اس واذا للزم ان يكون جسم ال أكبر من جسم ف حيث ان مقدار اع أكبر من مقدار اس والحق بخلافه لانه اصغر * ومن ثمة امتنع ان يكون الحد الرابع من هذا التناسب أعنى جسم ار : جسم ال :: اه : س أكبر من مقدار اط وبمثل هذا امتنع ان يكون أصغر منه بل يساويه وثبت المطلوب من أن تكون النسبة بين متوازيى السطوح متحدى القواعد بأى حال كانت

كالنسبة بين ارتفاعيهما

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية)

(شكل ٢١٣) متوازيا المستطيلات ار و ان متحدا الارتفاع هنا تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما احدى و امنع

فعلى ماترى من هذا الشكل اذا وضع أحدهما فى جانب الآخر وامتد مستوى ع ن ل حتى يلاق مستوى د ح ر ح فى ف ك يحدث متوازى المستطيلات اك وبه يمكن تقدير كل واحد من متوازيى المستطيلات ار و ان فاقول لاتحاد القاعدة اهحى فى جسمى ار و اك كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما اع و اس وأيضا الاتحاد قاعدة اع له فى جسمى اك و ان كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما اى و ام فلهذا صار جسم ار : جسم اك :: اس : اع وجسم اك : جسم ان :: اى : ام فاذا ضربت حدود هذين التناسبين بالترتيب وحذف جسم اك المشترك فى الحاصل تكون نسبة جسم ار : ان :: اس × اى : اع × ام وحيث ان اس × اى عنوان لقاعدة احدى و اع × ام عنوان لقاعدة امنع ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قواعدها وقد سلف عكسها

(الدعوى الرابعة عشرة النظرية)

أى متوازيى المستطيلات تكون النسبة بينهما كالنسبة بين حاصليهما الحادثين من ضرب قاعدة كل فى ارتفاعه أو من ضرب الابعاد الثلاثة فى كل منهما

(شكل ٢١٣) اذا وضع احد جسمى ار و اس متوازيى المستطيلات فى جنب الآخر بان تكون زاوية ساه مشتركة فى وجه الجسمين ثم يمتد ما يلزم اخراجه من المستويات ويرسم متوازى المستطيلات ان الثالث بان يكون ارتفاعه مساويا لارتفاع متوازى المستطيلات ار

فاقول على ما صرح به فى الدعوى السابقة يكون جسم ار : ان :: اسوى

: امدع ولاتحاد قاعدة امدع فى متوازيى المستطيلات اب و اس كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعى اه و اص اعنى ان جسم اب : جسم اس :: اه : اص فاذا ضربت حدود هذين التناسبين بالترتيب وحذف المضروب فيه المشترك وهو جسم اب يكون جسم اد : جسم اس :: اى × اه : امدع × اص فاذا وضع اب × اد و اع × ام عنوان كل من القاعدتين مقامهما كان جسم اد : جسم اس :: اب × اد × اه : اع × ام × اص ومن ذلك ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين متوازيى المستطيلات كالنسبة بين حاصلى ضرب قاعدة كل فى ارتفاعه أو ضرب الابعاد الثلاثة من كل منهما

تنبيه لاجل اخذ مساحة متوازى المستطيلات او قياسه يمكن ان يؤخذ حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه او حاصل ضرب ابعاده الثلاثة لما استبان من اثبات هذه الدعوى وتلك الطريقة صار يؤخذ بها مساحة كافة الاجسام ولادراك هذه المساحة كما ينبغى يقال ان المراد من حاصل ضرب خطين او أكثر هو حاصل ضرب الاعداد الحسابية التى تقوم مقام تلك الخطوط وحيث ان هذه الاعداد توافق الاحد الخطى فى كل حال أمكن ان تؤخذ كيفما اتفق فاذا كان الامر كما ذكر علم ان الاعداد الحاصلة من ضرب الابعاد الثلاثة من أى متوازى المستطيلات لاتفيد شيأ وحدها حيث لوقيست تلك الخطوط بالاحد الخطى غير الذى تقدم يظهر وقوع الخلاف بين ما يحصل من العدد وبين ما تقدم واما اذا قيس متوازى المستطيلات الآخر بالاحد الخطى الذى قيس به الاول وضربت الابعاد الثلاثة منه فى بعضها فحينئذ تكون نسبة الحاصلين كنسبة الجسمين ويحصل من الحواصل الصادرة عن الاعداد كما ذكر صور تجرى مجرى اجسامها فتأمل

جرم الجسم هو مساحته التى جعلت له منشأ وتسمى المساحة الجسمية بالجثة وهو ما حازه الجسم من الفراغ واستعملت علماء المساحة الجسم حيث يقال المساحة الجسمية لمتوازى المستطيلات واختصارا للافادة يقال جسمه اعنى حاصل ضرب

قاعدته فى ارتفاعه

اعلم ان المراد من الجسم الذى يذكر فى أصول الهندسة هو الجسم التعليمى الذى لا يبحث فيه عن كنهه ولا عن اجزائه المادية بل يبحث فيه عن امتداداته أى ابعاده الثلاثة ويسمى البحث فى الجسم من حيث انه جسم لا من حيث ادراك الكنه لان ذلك يتعلق بعلم الطبيعة كما لا يخفى

حيث ان اضلاع المكعب الثلاثة متساوية فان كان ضلعه واحدا فجسمه ١ × ١ × ١ يعنى ١ وان كان اثنين فجسمه ٢ × ٢ × ٢ يعنى ثمانية وان كان ثلاثة فجسمه ٣ × ٣ × ٣ يعنى ٢٧ الخ فان كانت اضلاع المكعب ١ و٢ و٣ الخ فتكون مكعباتها اى اجسامها ١ و٨ و٢٧ الخ ومن هذا قد تبين فى علم الحساب ان مكعب العدد هو ضرب ثلاثة امثاله فى بعضها وان بدا لمن يريد اعمال مكعب ضعف مكعب معلوم فيلزم استخراجه بان تكون نسبة ضلع المكعب المطلوب الى ضلع المعلوم كنسبة جذر مكعب عدد ٢ الى واحد وان تيسر جذر مربع عدد ٢ بعمليات الهندسة ولكن الى الآن وجود جذر كعب عدد اثنين بطريق اصول الهندسة بواسطة الدوائر التى علمت اقطارها ومراكزها والخطوط المستقيمة المعينة بمجرد ادراك نقطتى حدودها ممتنع ومن اجل ذلك قد اشتهر امتناع اعمال مكعب مساو لضعف مكعب آخر بطريق عمليات الهندسة كما اشتهرت مسئلة تثليث الزاوية بين المهندسين المتقدمين لكن مثل هذه المسائل قد تبين حلها بطريق آخر وان كان حل ما وجد منها ليس بسهل كطريق الهندسة لكن لا فرق بين الطريقين فى عنوان الصحة

اعلم ان تثليث الزاوية اعنى تقسيمها الى ثلاثة اقسام متساوية على طريق اصول الهندسة غير ممكن عند المهندسين المتقدمين وعدت بينهم من المشكلات التى تحتاج الى حل وكذا اجتهد فى حلها المهندسون المتأخرون فلم يمكن بطريق اصول الهندسة الجارية ولكن قد تبين حلها بطريق الهندسة العليا أعنى علم تطبيق الجبر على الهندسة وبطريق انشاء القطع المكافى واما ما ذكره الخليفة الاول بالمهندسخانه التى بالقسطنطينية المشهورة باسلامبول مصدويه جى زاده حسين

افندى

افندی فی رسالته بخصوص تثلیث الزاویة بطریق الهندسة فانه باطل لا یعمل به حیث لم یثبت له صحة وحیث لا فائدة فی وجودها بطریق الهندسة لکونه من قبیل تحصیل ما هو حاصل قد سقطت تلک المسئلة من درجة الالتفات بین علماء الهندسة

(الدعوی الخامسة عشرة النظریة)

جسم متوازی السطوح وعموما کل جسم منشور مساو لحاصل ضرب قاعدته فی ارتفاعه

اولا لان متوازی السطوح مکافئ لمتوازی المستطیلات الذی قاعدته عین قاعدته وارتفاعه کذلک (١١) فتبین ان جسم متوازی السطوح مساو لحاصل ضرب قاعدته فی ارتفاعه حیث ان جسم متوازی المستطیلات کذلک

ثانیا کل منشور مثلثی یکون نصفا للمنشور الذی انشئ وقاعدته ضعف قاعدته وارتفاعه عین ارتفاعه فتبین ان جسم المنشور المثلثی مساو لحاصل ضرب قاعدته فی ارتفاعه حیث ان جسم متوازی السطوح مضاعفه مساو لحاصل ضرب ضعف تلک القاعدة فی ذلک الارتفاع

ثالثا ان کل منشور جسمه مساو لحاصل ضرب قاعدته فی ارتفاعه حیث یمکن تقسیمه الی منشورات مثلثیة متحدة الارتفاع بعدد المثلثات التی احتوت علیها قاعدته وجسم کل منها مساو لحاصل ضرب قاعدته الجزئیة فی الارتفاع المشترک فکان مجموع المنشورات مساو بالحاصل ضرب مجموع المثلثات التی اتخذت قواعد فی الارتفاع المشترک فصارت مساحة ای منشور تساوی حاصل ضرب قاعدته فی ارتفاعه وثبت المطلوب

نتیجة المنشوران المتحدا الارتفاع النسبة بینهما کالنسبة بین حواصل ضرب القواعد فی الارتفاع او کنسبة القاعدتین حیث ان قواعد المنشورات المتحدة الارتفاع تجری مجری اجسامها وایضا اذا اتحدت القاعدة بین المنشورات فالنسبة بینها کالنسبة بین ارتفاعاتها

(الدعوی السادسة عشرة الفائدة)

(شكل ٤١٢) اذا قطع اهرام سـ ا ب ج د هـ بمستوى و و ط الموازى لقاعدته اولا تنقسم اضلاع سـ ا و سـ ب و سـ ج الخ وارتفاع سـ ع فى نقط و و ح الخ و ص على التناسب

ثانيا مقطع و ح ط ى يصير شكلا مستقيم الاضلاع يشابه قاعدة ا ب ج د هـ

اولا لتوازى مستويى ا ج و و ح يكون فصلاهما المشتركان ا ب و و ر بمستوى سـ ا ب الثالث متوازيين (١٠ امقاله ٥) ومن اجل ذلك تشابه مثلثا سـ ا ب و سـ و ر وبه ظهر تناسب سـ ا : سـ و :: سـ ب : سـ ر وايضا سـ ب : سـ ر :: سـ ج : سـ ح وكذا البواقى فلذا انقسمت اضلاع سـ ا و سـ ب و سـ ج الخ فى نقط و و ح على التناسب وانقسم ايضا ارتفاع سـ ع فى نقطة ص على التناسب

لانه يلزم من توازى ب ع و ر ص ظهور هذا التناسب سـ ع : سـ ص :: سـ ب : ر ص

ثانيا لتوازى و ر بخط ا ب وخط ر ح بخط ب ج وخط ح ط بخط ج د الخ تكون زاوية و ر ح = زاوية ا ب ج وزاوية ر ح ط = زاوية ب ج د وكذا باقى الزوايا

وما عدا هذا فلتشابه مثلثى سـ ا ب و سـ و ر تكون ا ب : و ر :: سـ ب : سـ ر وأيضا لتشابه مثلثى سـ ب ج و سـ ر ح صارت سـ ب : سـ ر :: ب ج : ر ح والتساوى النسب فيهما كانت ا ب : و ر :: ب ج : ر ح وايضا ب ج : ر ح :: ج د : ح ط وهلم جرا وحيث تناسبت الاضلاع وتساوت الزوايا المتناظرة من شكلى ا ب ج د هـ و و ر ح ط ى المستقيمى الاضلاع فقد تشابها

نتيجة اذا اشترك رأسا اهرامى سـ ا ب ج د هـ و سـ ك ل م واتحد فيهما الارتفاع أو كانت قاعدتاهما موضوعتين على مستو واحد وقطع هذان الاهرامان بمستو موازللقاعدة بحيث مقطعا و ر ح ط ى و ث غ ف فتكون

النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي ا ب ج د هـ و ك ل م لان تشابه ا ب ج د هـ
و ز ح ط ب يقتضي ان تكون نسبة سطحيهما كنسبة مربعي ضلعيهما
المتناظرين ا ب و د ز ولتناسب مقادير ا ب : د ز :: س ا : س و
الاربع ومربعاتها يصير ا ب ج د هـ : ز ح ط ب :: $\overline{\text{س ا}}^{2}$: $\overline{\text{س و}}^{2}$
وبمثل هذا يثبت ان تكون ك ل م : ق غ ف :: $\overline{\text{س ك}}^{2}$: $\overline{\text{س ق}}^{2}$ ومن
كون ز ح ق غ ف مستويا واحدا يكون س ا : س و :: س ك :
س ق فيكون ا ب ج د هـ : ز ح ط ب :: ك ل م : ق غ ف وحيث
ان النسبة بين مقطعي ز ح ط ب و ق غ ف كالنسبة بين قاعدتي ا ب ج د هـ
و ك ل م فاذا تكافأت القواعد تكافأت المقاطع المنشأة بالارتفاع الواحد

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

اذا تقاومت القاعدة وتساوى الارتفاع من هرمين تكافئا

(شكل ٢١٥) اذا كانت قاعدتا ا ب ج و اَ بَ جَ في هرمي س ا ب ج و
سَ اَ بَ جَ متقاومتين وموضوعتين على مستو واحد واشترك فيهما ارتفاع ا ب
فالهرمان المرقومان متكافئان * وان لم يتكافئا وكان المنشور المنشأ بارتفاع
اص على قاعدة ا ب ج تفاضلا بينهما بان يكون هرم سَ اَ بَ جَ هو الاصغر
فاذا انقسم ارتفاع ا ب المشترك الى اقسام متساوية يكون أحدها اصغر من
ارتفاع اص ويفرض ن ومن مستويات توازي القاعدة من نقط التقسيم
فالمقاطع الحادثة في الهرمين بتلك السطوح تكون متساوية يعني يكون مقطع
د هـ و = دَ هـَ وَ و د ح ط = دَ حَ طَ الخ (نتيجة ١٦) فاذا عملت ما ذكرنا
واتخذت مثلثات ا ب ج و د هـ و و د ح ط الخ قواعد و ا ي و د ز و د ك الخ اقسام
ضلع س ا حروفا وانشئت منشورات خارجية وايضا مثلثات دَ هـَ وَ و دَ حَ طَ
و كَ لَ مَ الخ قواعد واقسام ضلع اَ سَ حروفا وانشئت بها منشورات داخلية
فارتفاع ن يكون ارتفاعا مشتركا لكافتها وحيث ان مجموع المنشورات

الخارجة اكبر من هرمها س ا ح ومجموع المنشورات الداخلية اصغر من هرمها سَ اَ حَ لزم ان يكون الفرق بين المجموعين من المنشورات أكبر من التفاضل بين الهرمين المرقومين

فاقول ابتداء من جهة قاعدتى ا ح و اَ حَ ان المنشور الخارج الثانى د هـ و ر من الهرم الاول يكافئ المنشور الاول الداخل دَ هَ وَ اَ من الهرم الثانى لتكافئ قاعدتى د هـ و و دَ هَ وَ فيهما واتحاد ارتفاع ن بينهما وبمثله تكافأ منشور ز ح ط ك الثالث الخارج بمنشور زَ حَ طَ كَ الثانى الداخلى وكذا الرابع الخارجى والثالث الداخلى يتكافئان وهلم جرا حتى الاخير فعلم من هذا ان مجموع المنشورات الخارجة من هرم س ا ح غير منشور ا ح د الاول مساو مجموع المنشورات الداخلية من هرم سَ اَ حَ فكان منشور ا ح د هو التفاضل بين المجموعين من منشورات كل من هرمى س ا ح و سَ اَ حَ وقد ثبت آنفا ان الفرق بينهما أكبر من الفرق بين الهرمين المرقومين واذا لكان منشور ا ح د أكبر من منشور ا ح ص المقشا بارتفاع ا ص وليس كذلك بل بالعكس لان ارتفاع ا ص اكبر من ارتفاع ن مع اتحاد قاعدة ا ح فيهما فلا جرم ان يكون منشور ا ح ص اكبر من منشور ا ح د وهذا آكد دليل على بطلان ما فرض وثبت المطلوب من انه متى تفاوتت القواعد واتحد الارتفاع فى هرمى س ا ح و سَ اَ حَ يكونان متكافئين

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

كل هرم مثلثى ثلث المنشور المثلثى اذا اتحد فيهما القاعدة والارتفاع

(شكل ٢١٦) اى اذا كان س ا ح هرما مثلثيا و ا ح د هـ س منشورا مثلثيا واتحدا قاعدة وارتفاعا فالهرم ثلث المنشور

فاذا طرح هرم س ا ح من المنشور يبقى جسم س ا ح د هـ هرما رباعيا

قاعدته ا ح ى هـ ورأسه سـ فاذا وصل قطر ح هـ ومر بمستوى سـ ح هـ
ينقسم ذلك الهرم الى هرمين مثلثين ارتفاعهما هو العمود المشترك النازل من
رأس سـ على مستوى ا ح ى هـ وقاعدتاهما مثلثا ا ح هـ و ى ح هـ اللذان
هما نصفا متوازى الاضلاع ا ح ى هـ ولتساويهما كان هرما سـ ا ح هـ
و سـ ى ح هـ المرقومان متقاومين لكن هرما سـ ى ح هـ و سـ ا ب ح قاعدتاهما
ا ب ح و ى هـ سـ متساويتان والارتفاع واحد حيث انه البعد الحقيقى بين
مستويى ا ب ح و ى هـ سـ المتوازيين فوجب التكافؤ بينهما وقد ثبت آنفا
ان هرم سـ ى ح هـ يقاوم هرم سـ ا ح هـ فلذا تكافأت الاهرام الثلاث
سـ ا ب ح و سـ ى ح هـ و سـ ا ح هـ التى تركب منها منشور ا ب ى ومن ثمة
ثبت المطلوب وهو أن يكون هرم سـ ا ب ح ثلث المنشور الذى اتحد به قاعدة
وارتفاعا

(نتيجة) مساحة اى هرم تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى الارتفاع

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

(شكل ٢١٤) كل هرم نحو سـ ا ب ح ى هـ ثلث حاصل ضرب قاعدته
ا ب ح ى هـ فى ارتفاعه سـ ع يساوى مساحته الجسمية

لانه اذا مر من قطرى القاعدة هـ ب و هـ ح بمستويى سـ هـ ب و سـ هـ ح
ينقسم هرم سـ ا ب ح ى هـ الكثير السطوح الى اهرام مثلثية متعددة
يكون سـ ع ارتفاعا مشتركا فيها والمساحة الجسمية من كل تساوى حاصل
ضرب كل من قواعد ا ب هـ و ب ح هـ و ح ى هـ فى ثلث ارتفاع سـ ع كمنطوق
السابقة فكان مجموع مساحة الاهرام المثلثية أو الهرم الكثير السطوح
المرقوم مساويا لحاصل ضرب مثلثات ا ب هـ و ب ح هـ و ح ى هـ أو كثير الاضلاع
ا ب ح ى هـ فى ثلث الارتفاع اعنى $\frac{1}{3}$ سـ ع ومن ثمة ظهر ان المساحة الجسمية
من كل هرم تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ثلث ارتفاعه ويجوز العكس
واخذ ثلث الحاصل

(نتيجة ١) كل هرم ثلث المنشور المتحد به قاعدة وارتفاعا

(نتيجة ٢) النسبة بين الهرمين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما والمتحدى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

(تنبيه) كل جسم كثير السطوح يمكن تقديره بتحليل جسامته الى اهرام واهذا التحليل وجوه شتى أهونها امرار المستويات التى تقسم الجسم من زاوية مجسمة واحدة وحينئذ ينقسم الجسم الكثير السطوح الى اهرام جزئية بعدد ماله من الوجوه سوى التى تحيط بالزاوية المجسمة فتأمل

(الدعوى العشرون النظرية)

كثيرا السطوح المتماثلان متقاومان

(شكل ٢٠٢) نقول اولا لان مساحتى هرمى ـــا ـــو وطا ـــ المتماثلين تكونان متكافئتين حيث كان ثلث حاصل ضرب قاعدة ا ـــ فى ارتفاع ـــو أو مو مقدارا مشتركا فيهما

وثانيا كما ينقسم احد كثيرى السطوح الى اهرام مثلثية فالآخر كذلك ينقسم الى اهرام مثلثية مقاومة ومناظرة للاول فعلم ان كثيرى السطوح المتماثلين يكونان متقاومين

تنبيه على ما صرح به فى الدعوى الثانية من ان كثيرى السطوح المتماثلين كما يتركب أحدهما من اجزاء يتركب الآخر كذلك من اجزاء تساوى ما فى الاول وهذه الدعوى عين الثانية وانما كررت تأكيدا للبرهان

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

اذا قطع الهرم بمستو يوازى قاعدته وطرح الهرم الذى فوق المستوى القاطع فالهرم الناقص اعنى ما تحت المستوى المرقوم مساحته تساوى مجموع ثلاثة اهرام يشترك فيها ارتفاع الهرم الناقص وقواعدها الثلاث العليا منه والسفلى وما كانت بينهما وسطا متناسبا

(شكل ٢١٧) مثلا اذا كان ـــا ـــ د هـ هرما قطع بمستوى أ ـــ دَ موازيا للقاعدة وكان م و ح هرما مثلثيا يكافئه قاعدة وارتفاعا فحيث لا مانع ان تكون القواعد منهما على مستو واحد فاذا امتد مستوى أ ـــ دَ

بعين مقطع وَدَحَ فى الهرم المثلثى فيكون ارتفاع المقطعين عن مستوى القاعدتين واحدا فتكون النسبة بين مقطعى وَدَحَ و أَبَدَ كالنسبة بين قاعدتى ودح و ابد وبتكافؤ القاعدتين يتكافأ المقطعان ويكون هرما س أَبَجَدَهَ و م وَدَحَ متكافئين لاتحاد القاعدة والارتفاع فيهما وحيث ثبت تكافؤ الهرمين الكليين فالباقيان اعنى الهرمين الناقصين متكافئان فحسبك مايجرى من العمل على الهرم الناقص المثلثى كانه اجرى على الاول لما بينهما من التكافؤ

(شكل ٢١٨) فاذا كان ودح حَوَدَ هرما ناقصا توازت قاعدتاه ومر بمستوى ودَح من ثلاث نقط و و دَ و ح ينفصل به من الجسم الاصلى هرم دَوَدح المثلثى وقاعدته هى السفلى من جسم ودح حَوَدَ المفروض وارتفاعه ارتفاعه حيث كانت رأس دَ نقطة من مستوى قاعدة وَدَحَ العليا * فيبقى من الجسم المرقوم هرم دَوَحَ ح و رباعى رأسه دَ وقاعدته شكل وَحَ ح و فاذا مر بمستوى وَدَح من نقط. وَ و دَ و ح الثلاث ينقسم ذلك الهرم الرباعى الى هرمى دَووَح و وَوَحَ ح الثلاثيين الاخير منها قاعدته وَدَحَ العليا من الجسم وارتفاعه عين ارتفاع الجسم حيث كانت رأسه ح نقطة من مستوى السفلى منه وبهذا علم من الثلاث اهرام التى تركب منها الهرم الناقص اثنان وبقى هرم دَووَح الثالث المراد العلم به

فيرسم دَك موازيا لخط وَو ويتصور هرم وَو ح ك جديد تكون قاعدته وَو ح * ورأسه ك فهذان الهرمان تتحد فيهما قاعدة وَو ح وكذلك الارتفاع * لوقوع كل من رأسى دَ و ك على خط دَك الموازى لخط وَو ولمستوى القاعدة فظهر التكافى بين الهرمين باتحادهما قاعدة وارتفاعا لكن اذا جعلت وَ رأسا الهرم وَو ك ح لاجرم ان ارتفاعه هو ارتفاع الجسم المفروض فاذا صيرت و ك ح قاعدة له فتكون وسطا متناسبا بين قاعدتى ودح و وَدَحَ * لان فى مثلثى وحك و ودح زاوية و = وَ

وضلع وك = وَدَ فتكون وحك : وَدَ حَ :: وح : وحَ
(٢٤مقالة ٣) وتكون ايضا وح د : وحك :: ود : وك أو وَدَ
ولكن لتشابه مثلثى ودح و وَدَ حَ كانت ود : وَدَ :: وح : وحَ
ولتساوى النسب فيهما لزم ان تكون ودح : وحك :: وحك : وَدَ حَ
فصارت قاعدة وحك وسطا متناسبا بين قاعدتى ودح و وَدَ حَ فتبين
ان يكون الهرم المثلثى الناقص المتوازى القاعدتين مساويا جسمه لثلاث اهرام
يشترك فيها ارتفاعه وقواعدها ثلاثة * العليا منه والسفلى وثالث قاعدتها
مقدارها وسط متناسب بينهما

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

(شكل ٢١٦) اذا قطع المنشور المثلثى الذى قاعدته ا ب ح بمستو ما د ه س
غير موازلها فالجسم الحادث ا ب ح د ه س من ذلك مساو لمجموع ثلاثة أهرام
اشتركت فيها قاعدته ا ب ح ورؤسها د و ه و س
فاذا مر بمستوى س ا ح من نقط س و ا و ح انفصل من المنشور المقطوع
ا ب ح د ه س هرم س ا ب ح المثلثى الذى قاعدته ا ب ح ورأسه س فيبقى
هرم س ا ح د ه المربعى الذى قاعدته ا ح د ه * فاذا مر ايضا بمستوى
س ه ح من نقط س و ه و ح انقسم ذلك الهرم المربعى الى هرمين مثلثيين
س ا ح ه و س ح د ه فهرم س ا ح ه الذى قاعدته ا ه ح ورأسه س
يكافئ هرم ه ا ب ح الذى قاعدته ا ه ح ورأسه ب لاتحاد القاعدة فيهما
والارتفاع * لان خط ب س موازلكل من خطى ا ه و ح د فيوازى
مستويهما ا ح ه فثبت بينهما التكافى وهرم ه ا ب ح قد تكون قاعدته
ا ب ح ورأسه ه واما هرم س ح د ه الثالث فيمكن تحويله الى هرم ا س ح د
لتكافئهما حيث اتحدت قاعدة س ح د فيهما وكذا الارتفاع وذلك لان خط
ا ه موازلمستوى س ح د ثم يتحول هرم ا س ح د ايضا الى هرم ا ب ح د
لوجود التكافى بينهما حيث اتحدت فيهما قاعدة ا ح د ولوقوع رؤسهما
ب و س على خط موازلمستوى القاعدة فكان س ح د ه و ا س ح د

و ا ب ح د

و اـ حـد الاهرام الثلاثة متكافئة وهرم اـ حـد قد تكون قاعدته اـ حـ ورأسه د ومن اجل ذلك صارت المساحة الجسمية من منشور اـ حـ د هـ سـ المقطوع يساوي مجموع ثلاثة اهرام تشترك فيها قاعدة اـ حـ ورؤسها د و هـ و سـ وثبت المطلوب

نتيجة اذا كانت حروف اهـ و ـ سـ و حـد عمادا على مستوى القاعدة فهي الارتفاعات للاهرام الثلاثة التي يتركب منها المنشور المقطوع وجسمه يساوي $\frac{1}{3}$ اـ حـ × اهـ + $\frac{1}{3}$ اـ حـ × ـ سـ + $\frac{1}{3}$ اـ حـ × حـد ولاشتراك $\frac{1}{3}$ اـ حـ في كل من المضروب تنحصر مساحته في $\frac{1}{3}$ اـ حـ × (اهـ + ـ سـ + حـد)

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

الهرمان المثلثيان المتشابهان ما تساوت منهما الزوايا الجسمية المتناظرة وتشابهت فيهما الوجوه المتناظرة

(شكل ٢٠٣) على ما صرح به في الحدود يكون في هرمي سـ اـ حـ و ط د هـ و مثلثا سـ اـ و اـ حـ من احدهما مشابهين لمثلثي ط د هـ و د هـ و من الآخر ولتشابه الوضع اعني ان زاوية اـ سـ = د هـ ط وزاوية ـ اسـ = هـ د ط وزاوية اـ حـ = د هـ و وزاوية ـ احـ = هـ د و وما عدا هذا اذا كان الميل والانحراف بين مستويي سـ اـ و اـ حـ مساويا للانحراف بين مستويي ط د هـ و د هـ و فالهرمان المرقومان يتشابهان فاذا علمت ما ذكرنا تتشابه منهما كافة الوجوه المتناظرة وتتساوى فيهما الزوايا الجسمية المتناظرة * فاذا أخذ ـ ر = هـ د و ـ ح = هـ و و ـ ـ = هـ ط ووصل ر ح و ر ـ و ـ ح فهرم ط د هـ و الحادث يساوي هرم ـ ر ـ ح لان ضلعي ر ـ و ـ ح اخذا مساويين لضلعي د هـ و هـ و وفرضت زاوية ر ـ ح مساوية لزاوية د هـ و فتساوى مثلثا ر ـ ح و د هـ و

فلاجل اثبات المساواة بين هذين الهرمين اولا توضع قاعدة د هـ و على قاعدة ر ـ ح المساوية لها باجراء العمل التطبيق ولتساوي انحراف مستويي

ءطھ و ءھو لمابين مستوى سا و اح تبين وقوع مستوى ءھط على مستوى اسح * ولكن حيث فرضت زاوية ءھط مساوية لزاوية د ب يقع خط ھط على مساويه بب فلذا تنطبق نقط ء و ھ و و و ط الاربع بنقط د و ب و ح و ب اتحادا وبذلك ظهر انطباق هرمى ءطھو و بدح ولكن لتساوى مثلثى ءھو و دبح تكون زاوية بدح = ھءو = باح وبذلك خط دح يوازى خط اح وخط دب خط اس فحينئذ مستوى بدح يوازى مستوى ساح (١٣ مقالة ٥) ومن ثمة تبين تشابه مثلث بدح أو مساويه طءو بمثلث ساح * ومثلث بسح أو مساويه طھو بمثلث سبح فلذا اتضح تشابه الوجوه الاربعة المتناظرة من هرمى ساسح و طءھو المثلثين وايضا الزوايا المجسمة المتناظرة منهما متساوية * لانه قد تقدم تطبيق زاوية ھ المجسمة على نظيرتها ب وكذلك تجرى البواقى مجراهما ولاجرم انا نرى زاويتى ط و س المجسمتين متساويتين حيث تركبتا من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية المتناظرة مع تشابه الوضع ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون الوجوه المتناظرة من الهرمين المثلثين المتشابهين متشابهة والزوايا المجسمة المتناظرة متساوية كما لا يخفى

(نتيجة ١) يصدر هذا التناسب من المثلثات المتشابهة فى ذينك الهرمين يعنى اب : ءھ :: بح : ھو :: اح : ءو :: اس : ءط :: سب : طھ :: سح : طو فلذا اعلم وجود تناسب اضلاع الاهرام المثلثية المتشابهة

(نتيجة ٢) لتساوى الزوايا المجسمة المتناظرة فكل ميل بين وجهى احد المتشابهين يساوى ما بين نظيريهما فى الآخر

(نتيجة ٣) اذا قطع الهرم المثلثى بمستوى دبح موازيا لاحد وجوهه ساح فهرم سبدح الجزئى يشابه هرم ساسح الكلى وذلك لتشابه مثلثى سدب و سدح لمثلثى ساس و ساح تناظرا ووضعا وتشابها ولتساوى انحراف مستوى احدهما لما هو نظيره فى الآخر ثبت التشابه بين

الهرمين

الهرمين المرقومين

(نتيجة ٤) (شكل ٢١٤) وعموما كل هرم نحو سـ ا ـ ٮ ح د هـ اذا قطع بمستوى ور ح ط ـ موازيا القاعدة فهرم سـ ور ح ط ـ الجزئى من قبل الرأس مشابه لهرم سـ ا ـ ٮ ح د هـ الكامل وذلك لتشابه قاعدتى ا ـ ٮ ح د هـ و ور ح ط ـ

* واذا وصل قطرا ا ح و و ح فاقول قد ثبت آنفا تشابه هرم سـ ا ـ ٮ ح لهرم سـ ور ح فتتعين ايضا نقطة سـ نظرا الى قاعدة و ر ح كما تعينت بالنسبة الى قاعدة ا ـ ٮ ح (حد ١٨) فتبين تشابه هرمى سـ ا ٮ ح د هـ و سـ ور ح ط ـ بما صرح به فى هذه النتيجة وما قبلها

تنبيه على ما ذكر من الحدود والتعريفات لابد لوجود المشابهة بين الهرمين من معرفة خمسة اشياء معينة ولكن استبدال تلك الاشياء بخمسة اخر اذا تعينت يثبت التشابه بين الهرمين كما ثبت عند وجود الخمسة الاول وبيان تلك الاخر وان كان منحصرا فى دعاوى متعددة ولكن اميزها ما ستذكر بعد هذه والمعنى ان الهرمين المثلثيين متى تناسبت اضلاعهما المتناظرة ثبت التشابه بينهما (شكل ٢٠٣)

لانه اذا كانت ا ـ ٮ : د هـ :: ٮ ـ ح : هـ و :: ا ح : د و :: ا سـ : د ط :: سـ ـ ٮ : هـ ط :: سـ ح : ط و فان تناسب هذه يحتوى على الشروط الخمسة التى تؤخذ بدلا مما ذكر فى الحد ورد من شروط المشابهة لان من ذلك توجد مشابهة مثلثى ا سـ ٮ و ا ـ ح لمثلثى د هـ ط و د هـ و ومثلث سـ ـ ح لمثلث ط هـ و فلذا صارت السطوح المستوية التى تحيط بزاوية ـ المجسمة تساوى المستوية المحيطة بزاوية هـ المجسمة الاخرى تناظرا ووضعا متشابها فوجب تساوى الانحراف بين مستويى سـ ا ـ و ا ـ ح لانحراف مستويى ط د هـ و د هـ و نظيرهما ومن ثمة ثبت تشابه الهرمين وآل الامر الى ما نتج من الشروط الاول فتامل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

كثيرا السطوح المتشابهان ما تشابهت وجوههما المتناظرة وتساوت زواياهما

الجسمة

(شكل ٢١٩) فاذا كان شكل ا ـ ح ءه قاعدة كثير السطوح وتعينت رؤس الزاويتين الجسمتين م و ۍ الخارجتين عن تلك القاعدة بهرمي م ا ـ ح و ۍ ا ـ ح المشتركين في قاعدة ا ـ ح وكانت قاعدة اَ ـَ حَ ءَ هَ من كثير السطوح الآخر شبيهة بقاعدة ا ـ ح ء ه وتعينت مَ و ۍَ نظيرتا م و ۍ بهرمي مَ اَ ـَ حَ و ۍَ اَ ـَ حَ نظيري م ا ـ ح و ۍ ا ـ ح فيتناسب بعدا م ۍ و مَ ۍَ لضلعي ا ـ و اَ ـَ على التناظر لان الانحراف بين مستويي م ا ح و ـ ا ح يساوي الانحراف بين مستويي مَ اَ حَ و ـَ اَ حَ بتشابه هرمي م ا ـ ح و مَ اَ ـَ حَ وايضا لوجود المشابهة بين هرمي ۍ ا ـ ح و ۍَ اَ ـَ حَ يكون انحراف مستويي ۍ ا ح و ـ ا ح مساويا لانحراف مستويي ۍَ اَ حَ و ـَ اَ حَ فان حذف ميل الاول من ميل الآخر يبقى انحراف مستويي ۍ ا ح و م ا ح مساويا لانحراف مستويي ۍَ اَ حَ و مَ اَ حَ لوقوع التشابه بين ذينك الهرمين فمثلث ح ا م يشابه مثلث مَ اَ حَ وحيث شابه مثلث ۍ ا ح مثلث ۍَ اَ حَ وقع التشابه بين الوجهين المتناظرين من هرمي م ۍ ا ح و مَ ۍَ اَ حَ المثلثين وتشابه الوضع وتساوي الانحراف فيهما فاذا ظهر تشابه الهرمين المرقومين (٢١) واضلاعهما المتناظرة تعطى هذا التناسب حيث ان م ۍ : مَ ۍَ :: ام : اَمَ وكذا ام : اَمَ :: ا ـ : اَ ـَ ولتساوي النسب كانت م ۍ : مَ ۍَ :: ا ـ : اَ ـَ

واما اذا كانت ف و فَ رأسين اخرين متناظرتين من كثيري السطوح المرقومين فتكون ايضا ف ۍ : فَ ۍَ :: ا ـ : اَ ـَ وكذا ف م : فَ مَ :: ا ـ : اَ ـَ وحينئذ تكون م ۍ : مَ ۍَ :: ف ۍ : فَ ۍَ :: ف م : فَ مَ فلذا علم ان كل مثلث يحدث بوصائل ثلاث رؤس من احد كثيري السطوح نحو ف ۍ م يشابه مثلث فَ ۍَ مَ المشكل من وصائل

الثلاث الرؤس الاخر المناظرة للاول من الآخر

واذا كانت ك و كَ رأسين متناظرين فيكون ايضا مثلث ف ك د مشابها المثلث فَ كَ دَ فضلا عن ان يكون انحراف مستوبي ف ك د و ف م د مساويا لانحراف فَ كَ دَ و فَ مَ دَ الآخر * لانه اذا وصل ك م و كَ مَ توجد المشابهة بين مثلثي ك د م و كَ دَ مَ فلذا زاوية ك د م مساوية لزاوية كَ دَ مَ فاذا تصور تشكيل زاوية مجسمة في نقطة د من ثلاث زوايا مسطحة ك د م و ك د ف و ف د م وفي نقطة دَ زاوية مجسمة اخرى بثلاث زوايا مسطحة كَ دَ مَ و كَ دَ فَ و فَ دَ مَ وحيث ان هذه المسطحة متساوية بالتناظر وجب تساوي المجسمتين المرقومتين فلذا انحراف مستوبي ف د ك و ف د م يساوي انحراف مستوبي فَ دَ كَ و فَ دَ مَ وان كان مستويا ف د ك و ف د م على مستو واحد فحينئذ تكون زاوية ك د م = ك د ف + ف د م وايضا زاوية كَ دَ مَ = كَ دَ فَ + فَ دَ مَ والمعنى ان مثلثي كَ دَ فَ و فَ دَ مَ يكونان على مستو واحد فظهر مما مر الى هنا ان ما كانت عليه زوايا م و د و ف و ك من حال ما فان نظائرها مَ و دَ و فَ و كَ تكون مثلها وتجري مجراها في كل الوجوه

الآن اذا فرض انقسام سطح احد كثيري السطوح الى مثلثات ا ب ح و ا ح د و م د ف و د ف ك الخ فلا جرم ان سطح الآخر يحتوي على مثلثات مساوية لتلك المثلثات عددا ومشابهة لها نحو اَ بَ حَ و اَ حَ دَ و مَ دَ فَ و دَ فَ كَ الخ واذا كانت مثلثات م ف د و د ف ك الخ المتعددة في مستو واحد فنظائرها مَ فَ دَ و دَ فَ كَ الخ تكون كذلك

والحاصل ان كل وجه في كثير السطوح كان شكلا مستقيم الاضلاع اياما كان فنظيره في كثير السطوح يكون شكلا يشابهه ويقابله محضا فعلم من هذا ان كثيري

السطوح المتشابهة تحاط بسطوح مستوية متشابهة هيئة ووضعا ومتساوية عددا كما علم ولا خفاء فيه

وما عدا هذا فالزوايا المجسمة المتناظرة من كثيرى السطوح المرقومين تكون متساوية * لانه كما اذا تصور تشكيل زاوية ه المجسمة بزوايا ك ه ف و ف ه م و م ه ر و ك ه ر المسطحة تتشكل نظيرتها هَ الاخرى بزوايا كَ هَ فَ و فَ هَ مَ و مَ هَ رَ و كَ هَ رَ المسطحة المشابهة لتلك الزوايا ولوجود المساواة بين كل مستويين من انحراف فى أحدهما لما بين نظيريهما فى الآخر ثبت امكان التطابق كاملا بين كل مجسمتين متناظرتين وان كثيرى السطوح المتشابهين تتساوى فيهما الزوايا المجسمة المتناظرة وتتشابه الوجوه المتناظرة هيئة ووضعا وهو المطلوب

(نتيجة) على ماصرح به فى الدعوى المتقدمة انه كما يتشكل هرم مثلثى من اربع رؤس فى كثير السطوح يتشكل من أربع رؤس نظائرها فى كثير السطوح المشابه له هرم مثلثى آخر يشبه ما تقدم لتناسب اضلاعهما المتناظرة

(تنبيه ٢١) وفى هذا يرى أن النسبة بين قطرى اه و اَهَ المتناظرين كالنسبة بين ضلعى اب و اَبَ على التناظر

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

كثيرا السطوح المتشابهان يمكن ان ينقسما الى اهرام متشابهة هيئة ووضعا ومتساوية عددا

لانه قد ثبت ان كثيرى السطوح يمكن انقسام سطوحهما الى مثلثات متناظرة متشابهة تشابهت أوضاعها واذا فرض ان جميع المثلثات التى تحيط بكثير السطوح سوى ما أحاط بزاوية ا المجسمة كقواعد فتتكون اهراما مثلثية مجتمعة فى نقطة ا المرقومة بعدد تلك القواعد فجملة هذه الاهرام عبارة عن جسم كثير السطوح فاذا انقسم الآخر الى اهرام مثلثية قد اجتمعت رؤسها فى نقطة اَ نظيرة ا فى الاول فكل هرم تشكل بوصائل الرؤس الاربع من

احدهما يشابه الهرم الذى تصور بوصائل الرؤس الاربع من كثير السطوح الآخر كما عرفت ومن ثمة قد ظهر اثبات امكان تقسيم كثيرى السطوح المتشابهين الى اهرام مثلثية متناظرة متشابهة قد تشابه وضعها وهو الظاهر

(الدعوى السادسة والعشرون النظريه)

النسبة بين الهرمين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعيهما المتناظرين لانه اذا تشابه الهرمان يمكن وضع الاصغر منهما فى الاكبر (شكل ٢١٤) بان تكون زاوية س المجسمة مشتركة فقاعدتا ا ب ج د ه و و ز ح ط ى من المرقومين متوازيتان لتشابه الوجوه المتناظرة منهما (٢٢) فتكون زاوية س و ز مساوية لزاوية س ا ب وايضا زاوية س ز ح لزاوية س ب ج بناء عليه مستوى و ز ح يوازى مستوى ا ب ج (١٤ مقاله ٥) فاذا كان الامر كما ذكر وكان خط س ع هو العمود النازل من رأس س على مستوى ا ب ج ونقطة ص ملتقا العمود المرقوم بمستوى و ز ح فعلى ما صرح به فى الدعوى الخامسة عشرة تكون س ع : س ص :: س ا : س و :: ا ب : و ز فلذا كان ١/٣ س ع : ١/٣ س ص :: ا ب : و ز ولتشابه قاعدتى ا ب ج د ه و و ز ح ط ى كانت ا ب ج د ه : و ز ح ط ى :: ا ب^٢ : و ز^٢ فاذا ضربت حدود هذين التناسبين حدا بحد يكون ا ب ج د ه × ١/٣ س ع : و ز ح ط ى × ١/٣ س ص :: ا ب^٣ : و ز^٣ ومن كون مقدار ا ب ج د ه × ١/٣ س ع هو مساحة جسم هرم س ا ب ج د ه ومقدار و ز ح ط ى × ١/٣ س ص مساحة جسم هرم س و ز ح ط ى كانت النسبة بين الهرمين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعيهما المتناظرين

(الدعوى السابعة والعشرون النظريه)

النسبة بين كثيرى السطوح المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعيهما المتناظرين لانه يمكن انقسامهما الى اهرام مثلثية متشابهة (٢٣)

(شكل ٢١٩) فنسبة هرمى اف ءم و اَفَ ءَمَ كنسبة مكعبى ضلعى ام و اَمَ المتناظرين أو مكعبى ضلعى اب و اَبَ وكذا فى كل هرمين فلذا كانت نسبة جميع الاهرام التى يتركب منها كثير السطوح اوذات كثير السطوح الى كثير السطوح الآخر كنسبة مكعب ضلع من الاول الى مكعب نظيره من الثانى وثبت المطلوب

(تنبيه عمومى)

بيان ما كان فى هذه المقالة من الدعاوى المتعلقة بالمساحة الجسمية من كثيرى السطوح بطريق الجبر على سبيل الاجمال فى هذا المحل

مثلا اذا كانت ب قاعدة منشور و ع ارتفاعه فمساحة جسمه ب × ع أو ب ع وكذا اذا كانت ب قاعدة هرم و ع ارتفاعه فمساحة جسمه ب × ١/٣ ع أو ع × ١/٣ ب أو ١/٣ ب ع وايضا اذا كانت ع ارتفاع هرم ناقص متوازى القاعدتين وكانت ا و ب قاعدتيه وحيث ان √(ا ب) هو الوسط المتناسب بينهما فمساحة جسمه ١/٣ ع × (ا + ب + √(ا ب))

واذا كانت ب قاعدة منشور مقطوع و ع و عَ و عً ارتفاعات ثلاث رؤسه العليا فمساحة جسمه ١/٣ ب × (ع + عَ + عً)

والنهاية اذا كانت هـ و هَ مساحتى كثيرى السطوح المتشابهين و ب و بَ ضلعيهما أو قطريهما المتناظرين فتكون نسبة هـ : هَ :: ب٣ : بَ٣ تمت المقالة السادسة بحسن توفيقه تعالى

(المقالة السابعة)

في بيان الكرات والمثلثات الكروية

الحدود

حد ١ الكرة جسم محدود باحاطة سطح منحن تكون جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخله وتلك النقطة تسمى مركزا

(شكل ٢٢٠) يمكن ان يتصور وجود جسم الكرة بدوران نصف دائرة ءاه على قطر ءه لان كافة نقط السطح المنحنى الحادث بحركة منحنى ءاه تكون على ابعاد متساوية من مركز ح

(٢) نصف قطر الكرة هو الخط المستقيم الواصل بين مركزها وبين نقطة من سطحها وقطرها او محورها هو الخط المستقيم المار من مركزها ومنتهى الطرفين الى سطحها وانصاف اقطار الكرة كلها متساوية وجميع أقطارها ايضا متساوية حيث كانت اضعافا لانصاف اقطارها

(٣) على ما سيأتي في الدعوى الاولى من الاثبات ان المقاطع الحادثة من المستويات تكون دوائر * فاذا علمت ما ذكرنا فالدوائر التي تمر من المركز تسمى دوائر عظمى والتي لم تمر منه تسمى دوائر صغرى

٤ المستوى الذي لا يشترك مع الكرة الا في نقطة واحدة فقط يسمى مماسا بالكرة

٥ قطب دائرة الكرة نقطة من سطح الكرة تكون الابعاد التي بينها وبين جميع نقط محيط تلك الدائرة كلها متساوية فعلى ما سيأتي في الدعوى السادسة ان الدائرة لها قطبان صغيرة كانت او كبيرة

٦ المثلث الكروي جزء من سطح الكرة احيط بثلاثة اقواس دوائر عظام وسميت تلك الاقواس اضلاع المثلث ولا زال كل واحد منها اصغر من نصف المحيط والزوايا الحادثة من تلاقي مستويها تكون زوايا ذلك المثلث

٧ المثلث الكروى يسمى قائم الزاوية ومتساوى الساقين ومتساوى الاضلاع كما صرح به فى المثلثات المستوية

٨ ذو الاضلاع الكثيرة الكروى أو المضلع الكروى قسم من سطح الكرة محدود باحاطة عدة اقواس دوائر عظام

٩ شقة الكرة قسم من سطح الكرة احيط بنصفى محيطى دائرتين عظيمتين محدودتين بقطر مشترك

١٠ ضلع الكرة قسم من جسم الكرة احيط بنصفى الدائرتين العظيمتين والشقة قاعدته

١١ الهرم الكروى قسم من جسم الكرة قاعدته مضلع كروى ورأسه زاوية مجسمة بالمركز احيطت بسطوح مستوية انتهت الى تلك القاعدة وتلاصقت بها

١٢ المنطقة قسم من سطح الكرة محصور بين المستويين المتوازيين بان يكونا لها قاعدتين * وان كان أحدهما مماسا بالكرة فليس لها حينئذ الا قاعدة واحدة فقط

١٣ قطعة الكرة قسم من جسم الكرة محصور بين المستويين المتوازيين وهما لها قاعدتان * وان كان احدهما مماسا بالكرة فليس لها حينئذ الا قاعدة واحدة فقط

١٤ ارتفاع المنطقة أو القطعة هو البعد الحقيقى بين قاعدتيها

١٥ (شكل ٢٢٠) كما يحصل بجسم الكرة من ادارة نصف دائرة د ا هـ على قطر د هـ فالجسم الحاصل من دوران قطاع د و و أو و ح ع يسمى قطاع الكرة

(الدعوى الاولى النظرية)

مقاطع الكرة الحادثة بمستو كلها دوائر

مثلا (شكل ٢٢١) اذا كان مقطع ا م ب محدثا بمستو فى الكرة التى مركزها ح وانزل عمود ح ع من نقطة ح على مستوى ا م ب ووصلت خطوط

حم و حم المختلفة الى النقط المختلفة من منحنى ام ب الذى حدد المقطع وحيث ان خطوط حم و حم و حب الموائل هى انصاف اقطار الكرة تكون متساوية وحيث انها موائل افترقت وهى متساوية الابعاد عن عمود حع (٥ مقالة ٥) ومن اجل ذلك كانت الخطوط المستقيمة وبالجملة عم و عم و عب متساوية ومقطع ام ب دائرة نقطة ع مركزها

(نتيجة ١) وان كان المقطع يمر بمركز الكرة فنصف قطره هو نصف قطر الكرة فلذا كانت الدوائر العظام من الكرة كلها متساوية

(نتيجة ٢) الدائرتان العظيمتان ينصف بعضهما بعضا دائما حيث كان فصلهما المشترك قطرا يمر بالمركز

(نتيجة ٣) جميع الدوائر العظام تقسم الكرة وسطحها بمتساويين * لانه من بعد انفصال نصفى الكرة اذا جعل محدبهما فى جهة واحدة وانطبق احدهما على الآخر مع اشتراك القاعدة من سطح الكرة اتحد السطحان وانطبقا وان لم ينطبقا لزم ان توجد نقط متباعدات واخر متقاربات من مركز الكرة وهذا بخلاف تعريفها

(نتيجة ٤) (شكل ٢٢١) مركز الدوائر الصغار ومركز الكرة يكون على الخط المستقيم العمود على مستوى الدائرة الصغيرة

(نتيجة ٥) (شكل ٢٢١) الدوائر الصغار أصغرها ابعد من المركز * لان بعد حع كلما كبر صغر وتر اب الذى هو قطر الدائرة ام ب الصغيرة

(نتيجة ٦) يمكن مرور دائرة عظيمة واحدة من نقطتين معينتين على سطح الكرة * لان هاتين النقطتين ومركز الكرة هى ثلاث نقط تعين المستوى هذا ان لم تكن تلك النقط على مستقيم واحد * واما اذا كانت النقطتان المعينتان واقعتين على نهايتى القطر فهما والمركز على مستقيم واحد واذا يجوز أن تمر من هاتين النقطتين دوائر عظام كثيرة لا تنحصر عددا

(الدعوى الثانية النظرية)

(شكل ٢٢٢) كل مثلث كروى نحو ا ب ح اى ضلع منه اصغر من مجموع الاثنين

الآخرين

فاذا كان ع مركز الكرة ووصلت انصاف اقطار ع ا و ع ح و ع ب وتصوران مستويات ا ع ب و ا ع ح و ح ع ب شكلت زاوية مجسمة فى نقطة ع المرقومة وحيث ان اقواس ا ب و ا ح و ح ب التى هى اضلاع مثلث ا ب ح الكروى مقادير لزوايا ا ع ب و ا ع ح و ح ع ب ولا جرم ان الثلاث زوايا المحيطة بالزاوية المجسمة كل واحدة منها اصغر من مجموع الاثنين الاخريين (٢١ مقالة ٥) فثبت المطلوب من ان يكون كل واحد من اضلاع ا ب ح المثلث الكروى اصغر من مجموع الاثنين الآخرين

(الدعوى الثالثة النظرية)

قوس الدائرة العظيمة الواصل بين نقطتين معينتين على سطح الكرة هو اقرب بعد بين تينك النقطتين

(شكل ٢٢٣) مثلا اذا كان خط ا ه ب الواصل بين نقطتى ا و ب قوس دائرة عظيمة * فان قيل يمكن أن نقطة م الخارجة عن القوس المذكور هى نقطة الخط الاصغر الواصل بين نقطتى ا و ب اقول يرسم م ا و م ب قوسى دائرة عظيمة من نقطة م ويؤخذ ب ه = ب م فعلى ما ذكر فى الدعوى التى تقدمت قوس ا ه ب يكون اصغر من مجموع قوسى ا م + م ب فاذا حذف ب ه و ب م المتساويين يبقى ا ه < ا م فالبعد من نقطة ب الى نقطة م سواء اتحد بقوس ب م أو كان خطا آخر هو مساو للبعد من نقطة ب الى نقطة ه * لانه اذا دور مستوى دائرة ب م العظيمة حول القطر المار بنقطة ب تأتى نقطة م على نقطة ه فلذا يتحد الخط الاصغر من نقطة م الى نقطة ب بالخط الذى هو من ه الى ب

فاحد الطريقين اعنى البعد بين نقطتى ا و ب يمر من نقطة م والآخر من نقطة ه واتساوى ما كان بين نقطتى م و ب بما كان بين نقطتى ه و ب من الطريقين وقد زعم ان المار من نقطة م هو الاصغر فلزم ان يكون البعد من نقطة ا الى نقطة م اصغر من البعد من نقطة ا الى نقطة ه وهو محال

* حيث ثبت آنفا ان قوس ا م ا كبر من قوس اك فرهذا علم ان الخط الاصغر بين نقطتى ا و ب ليس له نقطة خارجة عن اكب قوس الدائرة العظيمة وهو الاصغر بينهما وثبت المطلوب

(الدعوى الرابعة النظرية)

مجموع ثلاثة اضلاع المثلث الكروى اصغر من محيط دائرة عظيمة

(شكل ٢٢٤) مثلا اذا كان ابح مثلثا كرويا وامتد ضلعا اب و اح حتى يلتقيا فى نقطة د فقوسا ابد و احد يكونان نصفى محيط * لان الدائرتين العظيمتين يقسم بعضهما بعضا على التساوى (الاولى) ولاجرم ان ضلع بح < بد + حد فى مثلث بحد (٢) فاذا زيد اب + اح على كل من هذين الغير المتساويين يكون اب + اح + بح < ابد + احد اعنى ان مجموع ثلاثة اضلاع المثلث اصغر من المحيط وثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة النظرية)

كل مضلع كروى مجموع اضلاعه أصغر من محيط دائرة عظيمة

(شكل ٢٢٥) مثلا اذا كان ابحده مضلعا مخمسا وامتد ضلعاه اب و دح حتى التقيا فى نقطة و وحيث ان قوس بح اصغر من مجموع قوسى بو + وح صار محيط مخمس ابحده اصغر من محيط اهدو ذى الاربعة الاضلاع * وايضا اذا امتد ضلعا اه و ود حتى يلتقيا فى نقطة ر يكون هد < هر + رد فلذا صار محيط اهدو المرقوم اصغر من محيط مثلث اور ولقد صرح فى الدعوى السابقة ان مجموع الاضلاع الثلاثة من المثلث الكروى اصغر من محيط دائرة عظيمة فثبت المطلوب من ان يكون محيط المضلع الكروى ابحده اصغر من محيط دائرة عظيمة وهذا آكد دليل

تنبيه اصل بناء هذه الدعوى عين ما فى الدعوى الثانية والعشرين من المقالة الخامسة لانه اذا كانت ع مركزا ورسمت مجسمة بزوايا اعب و بعح

و ح ع ى الخ المسطحة فمجموعها اصغر من أربع قوائم فلا فرق بين هذه وبين ما فى المقالة الخامسة فى أصل البناء وان اختلف التعبير وطريق الاثبات لكن حيث ان الاضلاع فى كل منهما محدبة لو امتد أحدها فلا يقطع شكله أبدا

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ٢٠٠) اذا رسم قطر ى ه عمودا على ا م ب مستوى الدائرة العظيمة فنهايتاه ى و ه تكونان قطبين لدائرة ا م ب وما وازاها من الدوائر الصغار نحو و ق ر

اولا حيث ان خط ح ى عمود على مستوى ا م ب فهو عمود على جميع الخطوط التى تمر من موقعه به نحو ح ا و ح م و ح ب الخ واقواس ى ا و ى ب و ى م الخ تصير ارباع محيط وكذا اقواس ه ا و ه م و ه ب الخ فعلم ان كل واحدة من نقطتى ه و ى افترقتا من كل من كافة نقط محيط ا م ب متساوية الابعاد فكانتا قطبين لذلك المحيط

ثانيا حيث ان نصف قطر ى ح عمود على مستوى ا م ب فهو عمود على مستوى دائرة و ق ر الموازية لها ويمر ذلك العمود من ع مركزها (١) فاذا رسمت خطوط ى و و ى ق و ى ر

الموائل فهى متساوية لافتراقها عن عمود ى ع متساوية الابعاد وتتساوى اقواس ى و و ى ق و ى ر الخ لتساوى اوتارها فلذا ثبت ان نقطة ى هى قطب لدائرة و ق ر وبذلك ثبت ان نقطة ه قطبها الآخر

(نتيجة ١) حيث ان كل قوس واصل من نقطة من قوس دائرة ا م ب العظيمة الى قطبها هو ربع محيط سمى ربعا فقط اختصارا فهذا الربع يحدث زاوية قائمة بقوس ا م * لان خط ح ى عمود على مستوى ا م ح فكل مستو يمر بذلك العمود نحو ى م ح يكون عمودا على المستوى المرقوم (١٨ مقالة ٥) فعلى ما صرح به فى الحد السادس فالزوايا الحادثة بتلك المستويات نحو ا م ى تكون قائمة

(نتيجة ٢) لاجل وجود قطب قوس ا م المعين يرسم من نقطه م قوس م ى

من غير تحديد عمودا على ام ويؤخذ م د مساويا للربع فنقطة د هي احد قطبي قوس ام * أو يرسم من نقطتي ا و م قوسا ا د و م د غير محدودين عمودين على قوس ام فنقطة د ملتقاهما هي القطب المطلوب

(نتيجة ٣) وبالعكس اذا كان كل من البعدين من نقطة د الى نقطتي ا و م مساويا للربع فنقطة د هي قطب قوس ام وحينئذ كل من زاويتي د ام و ام د تكون قائمة * لانه اذا كانت نقطة ح مركز الكرة ورسمت انصاف اقطار ح ا و ح د و ح م فزاويتا ا ح د و م ح د قائمتان فخط ح د يكون عمودا على مستقيمي ح ا و ح م فهو عمود على مستويهما فلذا صارت نقطة د قطبا لقوس ام فضلا عن قيام زاويتي د ام و ام د (تنبيه) لوجود تلك الخواص في الاقطاب سهل ترسيم الاقواس واجراء عملها فوق سطح الكرة كما رسمت فوق المستوى

مثلا اذا دور قوس د و أو كل خط قدره انفراجا حول نقطة د ترسم بنقطة و نهايته دائرة و ق ر الصغيرة واذا دور ربع د و ا حول نقطة د فيرسم بنهاية ا قوس ام من دائرة عظيمة

وان اريد مد قوس ام أو كان لايعلم من امره الا نقطتا ا و م فقط أولا يتعين قطب د بالفصل المشترك بين القوسين المنشئين بانفراج واحد المساوي كل منهما الربع بان تجعل نقطتا ا و م مركزين * ثانيا حيث تعين قطب د فيجعل مركزا و بالانفراج المرقوم يرسم قوس ام وبه يتعين مخرجه وبالجملة اذا اريد انزال قوس عمود على قوس ام المعلوم من نقطة ف المعينة يمتد قوس ام حتى ينتهي الى نقطة س بأن يكون انفراج ف س قدر ربع المحيط فاذا رسم قوس ف م من قطب س بمقدار الربع الرقيم فهذا القوس هو العمود المطلوب

(الدعوى السابعة النظرية)

كافة المستويات العماد على نهاية نصف القطر تماس بالكرة

(شكل ٢٢٦) مثلا اذا كان مستوى و ا ر عمودا على نهاية نصف قطر ع ا

وأخذت نقطة م على ذلك المستوى ووصل ع ا و م ا فبعد ع م ا أكبر من بعد ع ا وذلك لقيام زاوية ع ا م فلذا تقع نقطة م خارج الكرة وكذا كل نقطة من مستوى و ا ر وحيث لم يكن له وللكرة نقطة مشتركة الا نقطة ا فقط ثبت المطلوب من ان يكون مماسا للكرة (حد ٤)

(تنبيه) وكذلك ثبت تماس الكرتين اذا لم يكن لهما الا نقطة مشتركة واحدة فقط حيث كان البعد بين المركزين مساويا لمجموع أو لتفاضل نصفي قطرى الكرتين فالمركزان ونقطة التماس تصير حينئذ على مستقيم واحد

(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ٢٣٦) زاوية ب ا ح الحادثة بين ا ب و ا ح قوسى الدائرتين العظيمتين مساوية لزاوية و ا ر المشكلة فى نقطة ا من مماسى القوسين المرقومين ويكون قوس د ه المرسوم بين ضلعى ا ب و ا ح المخرجين حسب الاقتضاء بأن تكون نقطة ا قطبا له معيارا لتلك الزاوية

لان مماس ا و المرسوم فى مستوى قوس ا ب عمود على نصف قطر ا ع وكذلك مماس ا ر المرسوم فى مستوى قوس ا ح يكون عمودا على ا ع المرقوم فلذا زاوية و ا ر تكون مساوية للزاوية الحادثة بين مستويى ع ا ب و ع ا ح (١٧ مقالة ٥) اعنى ما بين قوسى ا ب و ا ح وسميت ب ا ح وكذلك اذا كان قوسا ا د و ا ه ربعين فزاوية د ع ه تساوى ما بين مستويى ا ع د و ا ع ه حيث ان خطى ع د و ع ه عمودان على خط ع ا فلذا كان قوس د ه معيارا لما بين المستويين اعنى زاوية ح ا ب

نتيجة تقدر الزوايا من المثلثات الكروية بتقدير أقواس الدوائر العظام المحصورة بين أضلاعها بأن تكون رؤس زواياها أقطابا وكذلك سهلت طريقة رسم زاوية مساوية لزاوية معلومة

تنبيه (شكل ٢٣٨) الزاويتان المتقابلتان رأسا نحو ا ح ع و ب ح ة متساويتان * لان كلا منهما لازالت تتشكل بين مستويى ا ح ب و ع ح ة * ولا يخفى ان مجموع كل متجاورتين حادثتين من تلاقى قوسى ا ح ب و ع ح ة مساو

لقائمتين نحو زاويتى ا ح ع و ع ح ب

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ٢٢٧) اذا كان مثلث ا ب ح معلوما ورسم مثلث د هـ و مشكلا باقواس هـ و و و د و د هـ بأن تكون نقط ا و ب و ح اقطابا لنقط د و هـ و و تكون اقطابا ايضا الاقواس ب ح و ا ح و ا ب اضلاعه لان نقطة ا قطب لقوس هـ و فبعد ا هـ يكون ربعا وكذا بعد هـ ح حيث كانت نقطة ح قطب القوس د هـ فلذا نقطة هـ تكون قطب القوس ا ح حيث كان بعدها من كل من نقطتى ا و ح مساويا للربع (٦ نتيجة ٣) وبمثله ثبت ان نقطة د قطب قوس ب ح ونقطة و قطب قوس ا ب

(نتيجة) كما رسم مثلث د هـ و بواسطة مثلث ا ب ح فمثلث ا ب ح ايضا رسم بواسطته

(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ٢٢٧) اذا وضعت الاشياء التى كانت فيما تقدمت عينا فمقدار كل زاوية من احد مثلثى ا ب ح و د هـ و تساوى التفاضل بين نصف المحيط والضلع المقابل لها من المثلث الآخر

فيمتد ضلعا ا ب و ا ح حسب الاقتضاء حتى يلاقيا خط هـ و فى نقطتى ر و ع ومن كون نقطة ا قطب القوس ر ع فهو معيارها ولكن حيث ان قوس هـ ع ربع وكذا قوس ر و فنقطة هـ هى قطب قوس ا ع ونقطة و هى قطب قوس ا ر فلذا صار مجموع هـ ع + ر و قدر نصف المحيط وهو عين مجموع هـ و + ر ع فقوس ر ع معيار زاوية ا يساوى نصف المحيط مطروحا منه قدر ضلع هـ و وكذا مقدار زاوية ب يساوى نصف المحيط — د و ومعيار زاوية ح هو نصف المحيط — د هـ

ويقع التعاكس فى هذه الخاصة بين المثلثين لان كل واحد منهما مرسوم بواسطة الآخر فلذا وجدت مقادير د و هـ و و زوايا مثلث د هـ و وهى $\frac{1}{2}$ محيط — ب ح و $\frac{1}{2}$ محيط — ا ح و $\frac{1}{2}$ محيط — ا ب *

فاقول مثلا اذا كان قوس مے معيار الزاوية د فيصير مے + بج
= مج + بے = $\frac{1}{2}$ المحيط فلذا قوس مے = $\frac{1}{2}$ المحيط − بج
وكذا باقى الزوايا ومن ثمة قام البرهان على ما اريد اثباته

تنبيه (شكل ٢٢٨) واما الثلاثة الاخر الممكن تشكيلها بفصول اقواس دهـ و هـو و دو الثلاثة فلابد لها من علامة فارقة تميزها عن مثلث دهـو فلا ملجأ فى هذه الدعوى الا الى تسمية المثلث مركزيا و تميز مثلث دهـو من الثلاثة الاخر بان تكون زاويتاه ا و د فى جهة واحدة من طرفى ضلع بج (شكل ٢٢٧) و ب و هـ فى جهة ضلع اج و جو وفى احدى جهتى ضلع اب فصار مميزا بذلك عن المثلثات الثلاث الاخر واستحسن فى هذا الباب تسمية مثلثى ابج و دهـو كل واحد مثلثا قطبيا وان سماها بعض أقوام باسماء مختلفة

(الدعوى الحادية عشرة الفائدة)

*(شكل ٢٢٩) اذا كان مثلث ابج معلوما ورسم دهـج قوس دائرة صغيرة بقدر انفراج اج من قطب ا وقوس دوج من قطب ب بانفتاح بج ووصل قوسا الدائرة العظيمة اد و بد من نقطة د تقاطع قوسى دهـج و دوج فاقسام مثلث ابد الحادث تساوى اقسام مثلث ابج
لان ضلع اد = اج بالعمل وضلع بد = بج ولاشتراك اب كانت الاضلاع الثلاثة المتناظرة فى المثلثين متساوية *فالزوايا المقابلة لتلك الاضلاع تكون متساوية* فاذا فرض مركز الكرة ع وتصور تشكيل زاوية مجسمة فى نقطة ع بزوايا اعب و اعج و بعج المسطحة وكذلك الاخرى بزوايا اعب و اعد و بعد وحيث ثبت التساوى بين الاضلاع المتناظرة من مثلثى ابج و ابد فظهر ان الزوايا المسطحة التى تحيط باحدى المجسمتين مساوية ومناظرة للزوايا التى تحيط بالاخرى ولكن فى الدعوى (٢٣ مقاله ٥) ثبت التساوى بين كل انحراف حادث بين المستوية المتناظرة من احداهما والاخرى فصارت زوايا مثلث باد الكروى مساوية لزوايا مثلث

حا ب الآخر اعنى د ا ب = ب ا ح و د ب ا = ا ب ح و ا د ب = ا ح ب

فتبين تساوى الاضلاع والزوايا المتناظرة فى مثلثى ا ب د و ا ب ح

تنبيه ما كان فى هذين المثلثين من المساواة ليس مطلقا أى ليس على طريق التطبيق * لانهما مالم يكونا متساويى الساقين لايمكن تطبيق احدهما على الآخر وهذا من قبيل ماذكرناه من تساوى المتماثلين ومن اجل ذلك وجب تسمية مثلثى ا ب ح و ا د ب متماثلين

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

فى كرة واحدة اوفى كرات متساوية يتساوى المثلثان الكرويان وتتساوى اقسامهما اذا تساوى منهما مثنى الاضلاع وآحاد الزوايا التى بينهما

(شكل ٢٣٠) مثلا اذا كان ضلع ا ب = هو و اح = هر وزاوية ب ا ح = وهر ينطبق مثلث هور على مثلث ا ب ح او على مماثله ا ب د الآخر كما وقع بين المثلثين المستقيمى الاضلاع اذا تساوى منهما الضلعان والزاوية التى بينهما ولمساواة اقسام مثلث هور لاقسام مثلث ا ب ح تتساوى الاقسام الباقية منهما ويصير ضلع ب ح = ور وزاوية ا ب ح = هور وزاوية اح ب = هرو

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان الكرويان الموضوعان على كرة واحدة اوكرات متساوية وتتساوى جميع اقسامهما اذا تساوى منهما آحاد الاضلاع ومجاورتاه من مثانى الزوايا

لانه يمكن تطبيق احدهما على الآخر كما فعل بمستقيمى الاضلاع فلا حاجة الى بسط برهان بل حسبك ماصرح به فى الدعوى (٧) من المقالة الاولى

(الدعوى الرابعة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان الموضوعان على كرة واحدة اوكرات متساوية اذا تساوت اضلاعهما المتناظرة الثلاثة * اى تتساوى منهما ايضا الزوايا المتناظرة الموترة بتلك الاضلاع

(شكل ٢٢٩) وهذه القضية واضحة مما صرح به في الدعوى (١١) اذ لا يمكن فيها الا رسم مثلثين اثنين ا ب ح و ا ب د بثلاثة اضلاع معلومة نحو ا ب و ا ح و ب ح هذا ووقوع الخلاف في جهة وضع الاقسام وان كان ممكنا لكن لا مخالفة في صحة تساويها قدرا ومن ثمة ثبت تساوى المثلثين وتساوى اقسامهما على التناظر

وذلك التساوى اما ان يكون مطلقا او تماثليا والمعنى متى تساوت اضلاعهما الثلاثة تتساوى الزوايا المتناظرة المقابلة لتلك الاضلاع

(الدعوى الخامسة عشر النظرية)

كافة المثلثات الكروية المتساوية الساقين مثانى زواياها المقابلة للاضلاع المتساوية متساوية

وبالعكس المثلث الكروى اذا تساوت زاويتاه فهو متساوى الساقين

(شكل ٢٣٢) اولا اذا كان اب = اح فزاوية ح = زاوية ب لانه اذا انزل قوس اد من رأس ا على د وسط القاعدة فالمثلثان الحادثان ابد و ادح تتساوى اضلاعهما الثلاثة المتناظرة لاشتراك اد و بد = دح و اب = اح فعلى ما صرح به في الدعوى التي تقدمت تتساوى زواياهما المتناظرة وبالجملة زاوية ب تكون مساوية لزاوية ح

وثانيا اذا كانت زاوية ب = زاوية ح فضلع اح = اب * لانه ان لم يكن اب مساويا اح وكان اب اكبرهما يؤخذ به = اح ويوصل هح ولمساواة ضلعى به و بح اضلعى اح و بح وكون زاوية هبح بين الاولين مساوية لزاوية احب بين الثانيين يلزم تساوى ما بقى من اقسام مثلثى بهح و احب (١٢) فزاوية هحب = ابح وقد فرض مساواتها لزاوية احب فيلزم ان تكون زاوية هحب = احب واذا يلزم مساواة الجزء للكل وهو محال فكان عدم المساواة بين اب و اح المقابلين لزاويتى ب و ح المتساويتين غير ممكن ويثبت المطلوب من ان ضلع اب مساو لضلع اح

تنبيه مساواة زاوية ب ا د لزاوية د ا ح وزاوية ب د ا لزاوية ا د ح ثابتة بالطريق الذى سبق والقيام زاويتى ب د ا و ا د ح علم ان القوس الواصل من رأس مثلث متساوى الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها ويقسم زاوية الراس الى قسمين متساويين

(الدعوى السادسة عشرة النظرية)

(شكل ٢٣٢) اذا كانت زاوية ا اكبر من زاوية ب فى مثلث ا ب ح الكروى فضلع ب ح المقابل لزاوية ا يكون اكبر من ضلع ا ح المقابل لزاوية ب

وبالعكس اذا كان ضلع ب ح اكبر من ضلع ح ا فزاوية ا تكون اكبر من زاوية ب

بيان ذلك أولا ان تقول حيث ان زاوية ا > ب فاذا انشئت زاوية ب ا د = لزاوية ب يصير ا د = ب د (١٥) لكن مجموع ا د + د ح أصغر من ضلع ا ح فاذا وضع ب د مقام ا د ظهر ان يكون د ب + د ح أو ب ح > ا ح

وثانيا اذا فرض ب ح > ا ح فزاوية ب ا ح تكون أكبر من زاوية ا ب ح

لانه اذا ساوت زاوية ب ا ح زاوية ا ب ح يصير ب ح = ا ح واذا كانت ب ا ح < ا ب ح يكون ب ح < ا ح كما ذكر آنفا وكل فيه خلاف لما فرض ومن ثمة ثبت المطلوب من ان تكون زاوية ب ا ح اكبر من زاوية ا ب ح

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

(شكل ٢٣٣) اذا ساوى ضلعا ا ب و ا ح من مثلث ا ب ح ضلعى د هـ و د و من مثلث د هـ و وكانت زاوية ا اكبر من زاوية د فضلع ب ح الثالث من المثلث الاول يكون اكبر من ضلع هـ و من الثانى وحسبك فى اثبات هذه ماصرح به فى الدعوى العاشرة (من المقالة الاولى)

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

اذا كان المثلثان المرسومان على كرة واحدة او كرات متساوية متساويى الزوايا فهما متساويا الاضلاع

فاذا كان ا و ب مثلثين معلومين ون و ك مثلثيهما القطبيين يلزم من تساوى الزوايا فى مثلثى ا و ب أن يكون مثلثا ن و ك القطبيان متساويى الاضلاع (١٠) ولكن لتساوى اضلاع مثلثى ن و ك القطبيين تتساوى زواياهما (١٤) وبذلك ظهر انه متى تساوت الزوايا فى مثلثى ن و ك تساوت الاضلاع (١٠) فلذا ظهر تساوى الاضلاع من مثلثى ا و ب القطبيين المتساويى الزوايا هذا وسيذكر اثبات هذه الدعوى فى المثلث القطبى فراجعه ان شئت

(شكل ٢٣٤) اذا تساوت زوايا مثلثى ابج و دهو اعنى اذا كانت ا = د و ب = ه و ج = و يصير اب = ده و اج = دو و بج = هو *فاذا أخذ از = هد و اح = دو على استقامة ضلعى اب و اج ووصل زح ومد قوسا بج و زح حتى التقيا فى نقطتى ط و ك فتساوى ضلعى از و اح لضلعى دو و ده بالعمل وحيث كانت زاوية زاح = باج = هدو فتتساوى الاقسام على التناظر فى مثلثى ازح و دهو (١٢) وبناء عليه تكون زاوية ازح = دهو = ابج وزاوية احز = دوه = اجب ولاشتراك ضلع بز فى مثلثى طبز و كبز وكون زاوية طزب = زبك وكون مجموع زاويتى طزب + زبك مساويا لقائمتين ومجموع زاويتى زبك و طبز فتصير زاوية بزك = طبز فلذا تساوى مثلثا طبز و زبك (١٣) ومن ثمة كان طز = بك و طب = زك وايضا من كون زاوية احز = اجب تساوى مثلثا طجح و حجك لتساوى آحاد الاضلاع ومجاورتيهما من الزوايا فى المثلثين المرقومين فيكون طح = جك و حك = طج

فاذا

فاذا طرح من ـ ك و ط د المتساويين ح ك و ط ح المتساويان الآخران يبقى ب ح و م ح متساويين ومن كون زاوية ب ح ا = ا ح د وزاوية ا ب ح = ا د ح يتساوى مثلثا ا ب ح و ا ح د لتساوى آحاد الاضلاع فيهما والزوايا مثنى ولمساواة كل قسم من مثلث د هـ و لكل قسم من مثلث ا د ح يصير مثلث د هـ و ايضا مساويا للمثلث ا ب ح ومن ثمة يكون ا ب = د هـ و ا ح = د و و ب ح = هـ و فظهر انه اذا تساوت الزوايا من المثلثين الكرويين تساوى منهما الاضلاع

تنبيه ما ذكر فى هذه الدعوى لا يجرى فى المثلث المستقيم الاضلاع * لانه اذا تساوت جميع الزوايا فى المثلث المستقيم الاضلاع لا يحكم على اضلاعها الا بالتناسب وبهذه تبين الاختلاف بين المثلثات المستقيمة الاضلاع والكروية باسهل طريق فى هذه الدعوى وفى (١٢) و (١٣) و (١٤) و (١٧) وقد صار البحث عن تقدير المثلثات بعضها واتضح بيانها سواء كانت موضوعة على كرة واحدة او كرات متساوية

وقد ذكرنا ان الاقواس المشابهة تناسب أنصاف اقطارها فلا يصح التشابه بين المثلثين المرسومين على كرتين متساويتين مالم يكونا متساويين فلذا صار تساوى الزوايا موجبا لتساوى الاضلاع واما اذا كانت المثلثات موضوعة على كرات غير متساوية فانما تتشابه تلك المثلثات اذا تساوت الزوايا وتكون النسبة بين اضلاعها كالنسبة بين انصاف اقطار تلك الكرات

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

مجموع زوايا المثلث الكروى اصغر من ست قوائم واكبر من قائمتين

وبيان ذلك اولا أن كل زاوية فى مثلث كروى اصغر من قائمتين (نظرا الى التنبيه الآتى) فلذا كان مجموع زوايا المثلث الكروى الثلاث اصغر من ست قوائم

وثانيا ان مقدار كل زاوية فى مثلث كروى يساوى نصف المحيط اذا طرح منه الضلع المقابل لها من المثلث القطبى (١٠) فلذا كان مقدار مجموع الزوايا الثلاث من المثلث الكروى يساوى التفاضل بين ثلاثة انصاف المحيط وبين مجموع

الاضلاع الثلاث من المثلث القطبي ولكون هذا المجموع الاخير اصغر من محيط دائرة عظيمة (٤) اذا طرح من ثلاثة انصاف المحيط فالباقي يكون اكبر من نصف المحيط أعني القائمتين ومن ثمة ظهر ان مجموع الزوايا الثلاث من كل مثلث كروى يكون اكبر من قائمتين

(نتيجة ١) مجموع الزوايا الثلاث في المثلث الكروى ليست على قدر واحد كما في المثلث المستقيم الاضلاع بل يزيد وينقص محصورا بين قائمتين وست قوائم غير مساو لاحدهما ومن ثمة اذا علمت زاويتاه فلا تتعين الثالثة

(نتيجة ٢) قد يكون في المثلث الكروى قائمتان وثلاث ومنفرجتان وثلاث

(شكل ٢٣٥) اذا كان مثلث ا ب ح قائم الزاويتين اعني اذا كانت زاويتا ب و ح قائمتين تكون رأس ا قطب قاعدة ب ح (٦) وكل واحد من ضلعي ا ب و ا ح يكون ربعا

وماعدا هذا اذا كانت زاوية ا ايضا قائمة فمثلث ا ب ح الكروى يكون قائم الزوايا الثلاث فحينئذ تكون كافة زواياه قوائم واضلاعه ارباعا

المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث يحتوى عليه سطح الكرة ثمان مرات وسيرى في الشكل ٢٣٦ قوس م ك ربعا

تنبيه في الدعاوى التي تقدمت يفرض ان ضلع المثلث الكروى اصغر من نصف المحيط لما صرح به في الحد السادس فلذا لا يكون المثلث الا وزاويته دون قائمتين

(شكل ٢٣٤) اذا كان ضلع ا ب اصغر من نصف المحيط وكذا ا ح فلاجل التقاء هذين القوسين في نقطة د يمكن ان يخرجا معا

ومن كون مجموع زاويتي ا ب ح و ح ب د قدر قائمتين تكون زاوية ا ب ح وحدها اصغر من قائمتين

ومن المشاهد في المثلثات الكروية ما بعض اضلاعها اكبر من نصف المحيط وبعض زواياها اكبر من قائمتين بحيث اذا امتد ضلع ا ح على ان تم محيط ا ح هـ الكامل وطرح مثلث ا ب ح من نصف الكرة يبقى مثلث يسمى ا ب ح اضلاعه

ا ب ح و ب ح و اهدح وضلع اهدح اكبر من نصف محيط اهد وزاوية ب المقابلة له قد تجاوزت القائمتين بمقدار ح ب د ٠

تذييل يشاهد ان زيادة الاضلاع والزوايا كبرا تؤدى الى التجاوز عن حدود المثلثات وتعريفاتها لكن حل تلك المثلثات او تحديد اقسامها لم يزل منحصرا فى التعريفات بلا تجاوز عن حدودها لانه اذا طرح مثلث ا ب ح من نصف الكرة وهو معلوم الاضلاع والزوايا فلا جرم ان الزوايا والاضلاع من المثلث الباقى تعلم بسهولة ٠

(الدعوى العشرون النظرية)

(شكل ٢٣٦) نسبة شقة ام ب ق ا الى سطح الكرة كنسبة م ا ق زاوية الشقة الى اربع قوائم أو كنسبة قوس م ق مقدار تلك الزاوية الى المحيط وليفرض ان نسبة قوس م ق الى محيط م ق ب ك كالنسبة بين عددين صحيحين كنسبة عدد ٥ الى عدد ٤٨ مثلا فاذا قسم محيط م ق ب ك الى ثمانية واربعين جزأ متساويه يحتوى قوس م ق على خمسة منها ثم اذا وصل بين قطب آ ونقط التقسيم بارباع بقدر ذلك يحدث فى نصف كرة ام ق ب ك ثمانية واربعون مثلثا متساوية حيث تساوت اقسامها ولا جرم ان الكرة الكاملة قد احتوت على ست وتسعين مثلثا وشقة ام ب ق ا تحتوى على عشرة مثلثات فعلى هذا تكون نسبة الشقة الى الكرة كنسبة عدد ١٠ الى عدد ٩٦ أو كنسبة عدد ٥ الى عدد ٤٨ يعنى كنسبة قوس م ق الى المحيط ومن هذه الادلة التى ذكرت ثبت ان النسبة بين قوس م ق والمحيط كنسبة الشقة الى الكرة وان لم يكن مقياس مشترك بينه وبين المحيط

(نتيجة ١) النسبة بين الشقتين كالنسبة بين زاويتيهما

(نتيجة ٢) قد ذكر ان سطح الكرة يساوى ثمانية مثلثات قائمة الزوايا الثلاث (١٩) فاذا جعل احد هذه المثلثات واحدا يكون سطح الكرة ٨ أمثاله اذا علم ماذكر يعبر عن سطح الشقة التى زاويتها ا بمقدار ٢ ا وذلك متى قدرت زاوية ا بجعل القائمة واحدا وحيث كانت ٢ ا : ٨ :: ا : ٤ فقد وجد ههنا

حدان مختلفان احدهما من جنس الزاوية وهى القائمة والآخر من جنس السطح وهو المثلث القائم الزوايا الثلاث الذى اضلاعه ارباع

تنبيه نسبة ضلع الكرة المحصور بين مستويى ام ب و اح ب الى جسمها الكامل كنسبة زاوية ا الى اربع قوائم لانه متى تساوت الشقق تساوت اضلاع الكرة فاذا كانت النسبة بين ضلعى الكرة كالنسبة بين الزاويتين المحاطتين بمستوييهما

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

المثلثان الكرويان المتماثلان متساويان سطحا

(شكل ٢٣٧) اذا كان مثلثا ا ب ح و د ه و متماثلين اعنى ان ا ب = د ه و ا ح = د و و ح ب = ه و ولم يمكن تطبيق احدهما على الآخر فسطح مثلث ا ب ح مساو لسطح مثلث د ه و

فنجعل نقطة ب قطبا للدائرة الصغيرة التى تمر بنقط ا و ب و ح الثلاث (١) ويرسم من هذه النقطة اقواس ب ا و ب ب و ب ح المتساوية (٦) وترسم زاوية د و ن من نقطة و مساوية لزاوية ا ح ب ويرسم قوس و ن مساويا لقوس ح ب ويوصل د ن و ه ن

فمثلثا د و ن و ا ح ب يتساويان لتساوى الاقسام كلها فيهما حيث ساوى ضلعا د و و و ن ضلعى ا ح و ح ب وزاوية د و ن = ا ح ب (١٢) فساوى ضلع د ن ضلع ا ب وزاوية د ن و = ا ب ح

ولتساوى زاويتى د و ه و ا ح ب المقابلتين لضلعى د ه و ا ب المتساويين فى مثلثى د ه و و ا ب ح المتقدمين (١١) اذا طرحت منهما زاويتا د و ن و ا ح ب المتساويتان بالعمل تبقى زاويتا ن و ه و ب ح ب متساويتين ولمساوات ضلعى ن و و و ه لضلعى ب ح و ح ب ووجود التساوى بين جميع اقسام مثلثى و ن ه و ح ب ب يكون ضلع ن ه = ب ب وزاوية و ن ه = ح ب ب

فالآن اذا نظرت فى مثلثى د و ن و ا ح ب بعين فكر ترى ان الاضلاع المناظرة

متساوية وانه يمكن تطبيق احدهما على صاحبه حيث كانا متساويي الساقين لانه اذا وضع ضلع ب ا على ن و المساوي له يقع ب ح على ن د المساوي له ومن أجل ذلك انطبق المثلثان واتحدا فاذا وقع التساوي ومن ثمة كان سطح د ن و = ا ب ح وكذلك اثبات ان سطح و ن هـ = ح ب ب وسطح د ن هـ = ا ب فعلى هذا صار د ن و + و ن هـ + د ن هـ = ا ح + ح ب + ا ب أو د و هـ = ا ب ح فقد اتضح تساوي مثلثي ا ب ح و د هـ و سطحا

(تنبيه) حيث يمكن وقوع قطبي ب ن داخل مثلثي ا ب ح و د هـ و فحينئذ يجب انضمام ثلاثة مثلثات د ن و و ن هـ و د ن هـ لتركيب مثلث د هـ و ومثل ذلك يجب لتركيب مثلث ا ب ح من ا ح و ح ب و ا ب الثلاث الاخر والاثبات فيه وفيما ينتج منه على وتيرة واحدة

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

(شكل ٢٣٨) اذا تقاطعت دائرتا ا ع ب و ح ع د كما يراد في نصف كرة ا ع ح ب د فمجموع مثلثي ا ع ح و ب ع د المتقابلين مساو للشقة التي زاويتها ب ع د

لانه اذا امتد قوسا ع ب و ع د حتى التقيا في نقطة ك من النصف الآخر من الكرة فقوس ع ب ك يكون نصف محيط وكذا ا ع ب فيبقى ب ك = ا ع اذا طرح ع ب من كل من الطرفين وبذلك يكون د ك = ح ع و ب د = ا ح فلما ثبت التساوي بين مثلثي ا ع ح و ب د ك لتساوي اضلاعهما الثلاثة ونظرا الى هذا الوضع حيث انهما متماثلان فهما متساويان سطحا (٢١) ومن اجل ذلك ظهر ان يكون مجموع مثلثي ا ع ح و ب ع د مكافئا للشقة ع ب ك د ع التي زاويتها ب ع د وثبت المطلوب

تنبيه لقد تبين من هذا ان مجموع الهرمين وهما ما كانت القاعدة فيهما ا ع ح و ب ع د مكافئ ايضا لضلع الكرة وهو ما كانت زاويته ب ع د

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

سطح كل مثلث كروى يساوى التفاضل بين مجموع زواياه الثلاث وبين قائمتين
(شكل ٢٣٩) اذا كان ا ب ح المثلث المفروض وامتدت اضلاعه حتى تلاقت
بمحيط دائرة د هـ و ر العظيمة المرسومة كيفما اتفق خارجا عنه فعلى ماصرح به
فى الدعوى التى سلفت يكون مجموع مثلثى ا د هـ و ا ر ح مكافئا للشقة التى
زاويتها ا ومقدارها ٢ ا (٢٠) فاذا صار ا د هـ + ا ر ح = ٢ ا وبمثله
يثبت ان ب ور + ب ط د = ٢ ب و ح ط ح + ح و هـ = ٢ ح
ولزيادة مجموع هذه المثلثات الست عن نصف الكرة بمقدار ضعف مثلث ا ب ح
ومقدار نصف الكرة مقدر بعدد ٤ كان ضعف ذلك المثلث مقداره ٢ ا
+ ٢ ب + ٢ ح — ٤ ومن ثمة كان مقدار مثلث ا ب ح = ا
+ ب + ح — ٢ وتبين ان كل مثلث كروى سطحه يساوى التفاضل بين
زواياه الثلاث وبين القائمتين
(نتيجة ١) مثلث ا ب ح المفروض يحتوى على المثلث القائم الزوايا الثلاث اعنى
ثمن الكرة المتخذ احدا بقدر ما فى تلك المساحة من قائمة (٢٠) مثلا اذا كانت
كل واحدة من زواياه = $\frac{٤}{٣}$ قائمة فمجموع الزوايا الثلاث منه يساوى اربع
قوائم وتتعين مساحته هكذا ٤ — ٢ أو ٢ وهو مقدار اشتمال المثلث
المفروض على المثلث الواحدى وهو ثمن الكرة ومن ثمة كان مجموع المثلثين القائمى
الزوايا الثلاث مساويا لربع الكرة
(نتيجة ٢) لوجود التكافى بين مثلث ا ب ح والشقة التى زاويتها $\frac{ا + ب + ح}{٢}$ — ١
وجب التكافؤ بين الهرم المثلثى الذى قاعدته ا ب ح وبين ضلع الكرة لذى
زاويته $\frac{ا + ب + ح}{٢}$ — ١
تنبيه كما قدر مثلث ا ب ح الكروى بالمثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث
يتقدر الهرم الكروى القاعدة على ا ب ح بالهرم القائم الزوايا الثلاث
ويظهر من هذا عين ماذكر من التناسب وتتقدر مجسمة رأس الهرم بمجسمة
رأس الهرم القائم الزوايا الثلاث وذلك مبنى على ماصرح به من الاقسام * لانه
متى انطبقت قواعد الاهرام انطبقت ذواتها او انطبقت رؤس زواياها المجسمة

ويستنتج

ويستنتج من هذا نتيجتان

الاولى النسبة بين الهرمين الكروين كالنسبة بين قاعدتيهما واذا أمكن تقسيم الهرم ذى الاضلاع الكثيرة الى اهرام مثلثية تبين ان النسبة بين مطلق الاهرام كالنسبة بين قواعدها الكثيرة الاضلاع

الثانية لاتحاد التناسب بين القواعد وبين الرؤس المجسمة اذا اريد تقدير زاويتين مجسمتين يلزم وضع رؤسهما فى مركزى كرتين متساويتين ومن ثمة صارت النسبة بين هاتين المجسمتين كالنسبة بين المضلعين المنحصرين بين مستويهما وحيث تشكلت الزاوية المجسمة فى الهرم القائم الزوايا الثلاث من ثلاث مستويات متعامدة قد صح تسميتها زاوية مجسمة قائمة واستحسن اتخاذها مقياسا التقدير ماسواها من المجسمات وكان ذلك من باب اولى فاذا علمت ماذكر فالعدد الذى يرى مساحة المثلث الكروى كذلك يكون مقدار الزاوية المجسمة المقابلة له مثلا اذا كانت مساحة المثلث الكروى ٣/٤ من المثلث القائم الزوايا الثلاث فساحة الزاوية المجسمة التى تقابله تساوى ٣/٤ من المجسمة القائمة فتأمل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

المساحة السطحية من المضلع الكروى تساوى التفاضل بين مجموع زواياه وبين حاصل ضرب عدد اضلاعه بعد حذف اثنين بمقدار القائمتين

(شكل ٢٤٠) فاذا وصلت اقطار اح و اد من رأس ا الى جميع الرؤس الاخر فينقسم مضلع ا ب ح د هـ الى مثلثات بعدد اضلاعه الا اثنين وقد سبق ان كل مثلث مساحة سطحه تساوى الباقى عند طرح قائمتين من مجموع زواياه وقد علم ان زوايا المضلع عين الزوايا من المثلثات ومن اجل ذلك تبين ان مساحة السطح المضلع تساوى الباقى اذا طرح من مجموع زواياه حاصل ضرب القائمتين بعدد اضلاعه بعد حذف اثنين وثبت المطلوب

تنبيه اذا فرض ان مجموع زوايا المضلع الكروى س وعدد اضلاعه ن والقائمة أحد فمساحة سطحه تكون س − ٢ (ن − ٢) أو س − ٢ ن + ٤ فتأمل

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

اذا كان عدد الزوايا المجسمة من كثير السطوح س وعدد وجوهه ح وعدد حروفه اعنى حدوده ا اقول لا يزال س + ح = ا + ٢ فتؤخذ نقطة داخل كثير السطوح ومنها توصل خطوط مستقيمة الى رؤس الزوايا كلها ثم تجعل تلك النقطة مركزا لسطح كروى يلاقى بالخطوط المرقومة فى نقط بعددها وتوصل ما بين النقط المذكورة باقواس دوائر عظام بذلك تتصور تشكيل مضلعات كروية تكون مقابلة لوجوه كثير السطوح المفروض وتحدبها عددا

(شكل ٢٤٠) مثلا اذا كان ا ب ح د ه احد المضلعات المذكورة وفرض عدد اضلاعه ن ومجموع زواياه (ا و ب و ح و د و ه) فتكون مساحة سطحه س − ٢ ن + ٤ وكذا يستخرج البواقى من المضلعات فاذا اجتمعت فمجموعها أو سطح الكرة الذى قد تعين بعدد ٨ يساوى مقدار مجموع كافة زوايا تلك المضلعات ناقص ضعف عدد الاضلاع زائد اربعة امثال الوجوه الموجودة وحيث ان ما يمكن حصره من الزوايا المسطحة حول نقطة ا قدر اربع قوائم يكون مقدار مجموع زوايا المضلعات كافة مساويا للاربعة امثال الزوايا المجسمة اعنى حاصل ضرب عددها فى اربعة وهو ٤ س ثم يكون ضعف اضلاع اب و ب ح و ح د الخ قدر اربعة امثال عدد الحروف اعنى مقدار ٤ ا لان الحرف الواحد ضلع مشترك لوجهين فاذا ٨ = ٤ س − ٤ ا + ٤ ح فاذا اخذ ربع هذا القدر يكون ٢ = س − ا + ح ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون س + ح = ا + ٢

نتيجة قد تبين من هذه الدعوى ان مجموع الزوايا المسطحة التى تحيط بالزوايا المجسمة تحتوى على القوائم الاربع بقدر ما فى س − ٢ من الاحد وانما جعلت س لاجل اظهار معاينة عدد الزوايا المجسمة من كثير السطوح

لانه اذا نظر الى احد وجوه الجسم الذى عدد اضلاعه ن وجدت مجموع زواياه ٢ ن − ٤ زوايا قوائم (مقاله ١) لكن حيث ان مجموع مقادير ٢ ن او ضعف عدد اضلاع سائر الوجوه = ٤ ا وان الحاصل من اخذ الوجوه ٤ مرات

= ٤ ح فكان مقدار مجموع الزوايا من كافة الوجوه ٤ ا − ٤ ح ومن كون
ا − ح = س − ٢ على ماصرح به آنفا من هذه الدعوى فتكون
٤ا − ٤ ح = ٤ (س − ٢) فهذا مقدار مجموع الزوايا المسطحة التي تحيط
بالمجسمة

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

(شكل ٢٧٢ و٢٧٣) اعظم المثلثات الكروية الموضوعة بضلعي حب و اح
المعلومين وثالث على اى وجه * مثلث ابح الذى تكون زاويته ح المحصورة
بين الضلعين المعلومين مساوية لمجموع زاويتى ا و ب الاخريين فليمتد ضلعا
اح و اب حتى يلتقيا فى نقطة د يحدث بحد المثلث الكروى تكون زاوية
دبح مساوية لمجموع زاويتى بدح و بحد الاخريين * لان مجموع زاويتى
بحد + بحا مساواتان لقائمتين وكذا مجموع زاويتى حبا + حبد
فلذا يصير بحد + بحا = حبا + حبد فاذا ضمت زاويتا
بحد و باح المتساويتان لكل من طرفى تلك المعادلة يكون بحد +
بحا + بدح = حبا + حبد + باح ولقد فرض كون
بحا = حبا + باح فيكون حبد = بحد + بدح
فاذا رسم بط على ان يكون حبط = بحد فيصير طبد =
بدح ومن كون مثلثى طبح و طبد متساويى الساقين كان طح
= طب = طد وتقع نقطة ط فى وسط دح وتكون على ابعاد
متساوية من نقط ب و ح و د الثلاث وكذلك ثبت ان نقطة ع وسط
خط اب تكون على ابعاد متساوية من نقط ا و ب و ح الثلاث
(شكل ٢٧٢) الآن اذا كان حاَ = حا وزاوية بحاَ > بحا
ووصل اَب وايضا اذا امتد قوسا اَح و اَب حتى التقيا فى نقطة دَ فقوس
دَحاَ يصير نصف محيط وكذا قوس دحا وحيث ان حاَ = حا ايضا
يكون حدَ = حد لكن فى مثلث حطدَ ضلع حط + طدَ > حدَ

فلذا يصير ط دَ > حـ د ـ حـ ط أو ط دَ > ط د فاذا قسمت زاوية ط
من مثلث حـ ط بـ المتساوى الساقين الى قسمين متساويين بقوس هـ ط و
فهذا القوس يكون عمودا على وسط بـ حـ فاذا اخذت نقطة ل بين نقطتى ط
و هـ فبعد بـ ل المساوى لبعد ل حـ يكون اصغر من بـ ط * لان بـ ل +
حـ ل < بـ ط + ط حـ كما صرح به فى التاسعة من المقالة الاولى فاذا نصف
الطرفان يصير بـ ل < بـ ط لكن فى مثلث دَ ل حـ ضلع دَ ل > دَ حـ ـ حـ ل
فوجب ان يكون دَ ل > د حـ ـ حـ ط أو دَ ل > د ط أو دَ ل > بـ ط
ومن اجل ذلك كان د لَ > بـ ل فاذا عينت نقطة على قوس هـ ط و بان
تكون على ابعاد متساوية من نقط بـ و حـ و دَ الثلاث فهذه النقطة لا توجد
الا على مخرج قوس هـ ط جهة نقطة و

مثلا اذا كانت النقطة المطلوبة طَ بان يكون دَ طَ = بـ طَ = حـ طَ
وحيث ان مثلثات طَ بـ حـ و طَ حـ دَ و طَ بـ دَ متساوية الساقين تكون
زواياها طَ بـ حـ = طَ حـ بـ و طَ بـ دَ = طَ دَ بـ و طَ حـ دَ = طَ دَ حـ
لكن زاويتى د بـ حَ + حـ بـ أَ مجموعهما مساو لقائمتين وكذا مجموع
زاويتى د حـ بـ + بـ حـ أَ فلذا دَ بـ طَ + طَ بـ حـ + حـ بـ أَ = ٢
و بـ حـ طَ + طَ حـ دَ + بـ حـ أَ = ٢

فاذا جمع هذان الحاصلان بالدقة كان طَ بـ حـ = بـ حـ طَ و دَ بـ طَ ـ
طَ حـ دَ = بـ دَ طَ ـ طَ دَ حـ = حـ دَ بـ = حَ اَ بعتبر ٢ طَ بـ حـ +
بـ اَ حـ + حـ بـ اَ + بـ حـ اَ = ٤ فعلى هذا صار حـ اَ بـ + حـ بـ اَ +
بـ حـ اَ ـ ٢ (وهى مساحة مثلث اَ بـ حـ) = ٢ ـ ٢ طَ بـ حـ اعنى ان
تكون مساحة اَ بـ حـ = ٢ ـ ٢ من مثل زاوية طَ بـ حـ وكذلك فى مثلث
ا بـ حـ مساحة ا بـ حـ = ٢ ـ ٢ من مثل زاوية ط بـ حـ فقد تم

البرهان على ان زاوية طَ ب ح اكبر من ط ب ح ومن ثمة كانت مساحة مثلث أَ ب ح اصغر من ا ب ح

(شكل ٢٧٣) اذا اخذ قوس حاَ = حا وانشئت زاوية أَحب < ب حا كذلك يكون البرهان ومانتج منه ولا خفاء ومن أجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون مثلث ا ب ح اعظم جميع المثلثات التى رسمت بضلعين معلومين قد اخذ ثالثهما كيفما اراد

(تنبيه ١) (شكل ٢٤١) مثلث ا ب ح قابل الرسم بضلعى حا و ح ب المعلومين فى نصف الدائرة التى قطرها وتر ا ب الضلع الثالث يكون اعظم المثلثات * لانه اذا كانت نقطة ع وسط ضلع ا ب لم تزل ترى التساوى بين بعدى ع ح و ع ب فلذا كان محيط الدائرة المرسومة بانفراج ع ث ونقطة ع قطبها يمر بنقط ا و ب و ح الثلاث فضلا عن ان يكون مستقيم ب ا قطرالها * حيث ان ذلك المزكر يوجد فى مستوى الدائرة الصغيرة وفى مستوى دائرة ب ع ا العظيمة معا (نتيجة ٤ دعوى ١) وجب وجوده فوق ا ب الفصل المشترك بينهما وبذلك صار ا ب المرقوم قطرا

(تنبيه ٢) حيث كانت زاوية ح فى مثلث ا ب ح مساوية لمجموع زاويتى ا و ب تبين ان مجموع الزوايا الثلاث منه يساوى ضعف زاوية ح لكن ثبت ان هذا المجموع لا يزال اكبر من قائمتين فكانت زاوية ح اكبر من قائمة

(تنبيه ٣) اذا امتد ضلعا حا و ح ب حتى التقيا فى نقطة هـ فمثلث ب اهـ يساوى ربع سطح الكرة * لان زاوية هـ = ح = ا ب ح + حا ب فاذا كان مجموع الزوايا الثلاث من مثلث ب اهـ يقاوم زوايا ا ب ح و ا ب هـ و حا ب و ب اهـ الاربع التى مجموعها يساوى اربع قوائم ومن ثمة كان سطح مثلث ب اهـ = ٤ — ٢ = ٢ اعنى ربع سطح الكرة

(تنبيه ٤) اذا كان مجموع الضلعين حا و ح ب المعلومين مساويا لنصف محيط الدائرة العظيمة او اكبر منها فلا اعظم فيه * لأن مثلث ا ب ح يجب رسمه فى نصف

محيط دائرة من الكرة ولكون مجموع ضلعي حا و حـ اصغر من نصف محيط ـ حا (٣) فكان مجموعهما اصغر من نصف محيط دائرة عظيمة

ومما يدل على عدم الاعظمية انه اذا كان مجموع الضلعين المعلومين اكبر من نصف محيط دائرة عظيمة فلا يزال ذلك المثلث يكبر حتى تصير الزاوية التي بين الضلعين المعلومين قدر قائمتين والاضلاع الثلاثة من المثلث تصير على مستو واحد فيؤل المثلث الى سطح نصف الكرة وحينئذ يخرج عن هيئة التثليث وهذا اكبر دليل على ماذكر

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية)

اعظم المثلثات الكروية المرسومة بضلع معلوم واطراف متساوية معينة ما كان ضلعاه الغير المعينين متساويين

(شكل ٢٤٢) مثلا اذا اشترك ضلع اـ المعين في مثلثي احـ و اءـ وكان اح + حـ = اء + ءـ اقول ان المثلث الذي فيه اح = حـ وهو احـ المتساوي الساقين اعظم من مثلث اـء ماليس بمتساوي الساقين

لانه متى اشترك بجزء اعـ بينهما فحسبك ان يكون مثلث ـعء اصغر من مثلث اعح ومن كون زاوية حـا المساوية لزاوية حاـ اكبر من زاوية عاـ فيكون ضلع اع اكبر من ضلع عـ (٢١) ثم يؤخذ عط = عـ ويرسم عن = ءع ويوصل نط فمثلث عنط يساوي مثلث ءعـ (١٢)

الآن وجب اثبات كون مثلث ءعـ أو مساويه نعط اصغر من عاح والا اللزم ان يكون مساويا له او اكبر منه وفي كل حال لم تزل نقطة ط بين نقطتي ا و ع فلزم وقوع نقطة ن على امتداد خط عح والا فاقول حيث احتوى مثلث حاع على مثلث عنط وخط حا اقرب بعد بين نقطتي حوا كان حن + نط + طا > حا لكن من كون حن = عء ـ حع و اط = اع ـ عـ و نط = ـء فصار عء ـ

ح ع + ا ع − ع ب + ب د > ا ح واختصارا ا د − ح ب
+ ب د > ا ح اواذاقلت ح ب يصير ا د + ب د > ا ح +
ح ب وهذا بخلاف المفروض اعنى ا د + ب د = ا ح + ح ب ومن
ثمة لايمكن ان تقع نقطة ن الاعلى امتداد ح ع بين نقطتيه ح و ع فلذا
ظهران مثلث ن ع ط اومساويه ع د ب اصغر من مثلث ا ع ح وثبت
المطلوب من ان يكون مثلث ا ب ح المتساوى الساقين اكبر من ا د ب الغير
المتساوى الساقين

(تنبيه) لاجرم ان ماذكر فى هاتين الاخيرتين يشابه ماذكر فى الاولى والثانية من ملحقات الرابعة وحيث ان المضلعات الكروية تجرى مجرى المضلعات المستقيمة الاضلاع بكل وجه نتذكر اوضاعها

اولا ان جميع المضلعات الكروية المتساوية الاطراف المتحدة الاضلاع عددا اعظمها ماتساوت اضلاعه قدرا وبرهانه ماثبت فى الثانية من ملحقات الرابعة

ثانيا ان جميع المضلعات الكروية الموسومة باضلاع معلومة سوى ضلع اخير يؤخذ كابرادا عظمها مايمكن رسمه فى نصف الدائرة التى يكون وترا الضلع الاخير المرقوم قطرالها وبرهانه قدذكر فى الدعوى الرابعة من ملحقات المقالة الرابعة استنباطا من (٢٦) وشرط وجود عظمه ان يكون مجموع الاضلاع المعلومة اصغر من نصف محيط دائرة عظيمة

ثالثا اعظم المضلعات الكروية مايمكن رسمه داخل محيط دائرة من دوائر الكرة وقد ذكر برهانه فى الدعوى السادسة من ملحقات المقالة الرابعة

رابعا اعظم المضلعات الكروية المتحدة الاضلاع عددا المتساوية الاطراف قدرا ماتساوت اضلاعه وزواياه معا

وحسبك فى برهانه ماذكر فى النتيجة الاولى والثالثة فتأمل اعلم ان ماذكر بخصوص عظم المضلعات الكروية يجرى فى الزوايا المجسمة التى هى مقدار تلك المضلعات

تمت بحسن توفيقه

بيان ملحقات السادسة والسابعة

بيان الاشكال كثيرة القواعد المنتظمة

(الدعوى الاولى النظرية)

الاجسام الكثيرة القواعد المنتظمة خمسة فقط لا منتظم سواها

وذلك ان جميع الوجوه في الكثير القواعد المنتظم اشكال مستقيمة الاضلاع منتظمة وكافة الزوايا المجسمة متساوية كما صرح به في التعاريف والحدود مما هو شرط لابد منه في صحة الانتظام فقد تبين انه لا توجد هذه الشروط الا فيما ذكر من كثيري القواعد قليلة العدد

نقول اولا اذا كانت وجوه كثير القواعد المنتظم من مثلث متساوي الاضلاع فكل زاوية مجسمة منه اما ان تتصور بثلاث زوايا او اربع او خمس من زوايا تلك المثلثات ويتفرع من ذلك ثلاثة اجسام منتظمة ذو اربعة قواعد وذو ثماني قواعد وذو عشرين قاعدة وهذه الاجسام قد اشتهرت بالاشكال المنتظمة الافلاطونية فلا يوجد غير هذه الثلاثة المذكورة من منتظم محاط بمثلثات متساوية الاضلاع اصلا لان ست زوايا من شكل ذلك المثلث تكافي اربع قوائم وبها يمتنع انشاء المجسمة (٢١ مقالة ٥)

ثانيا اذا كانت الوجوه مربعة وحيث لا تتركب المجسمة الا من ثلاث الزوايا منه فبذلك يحصل ذو ست قواعد اعني المكعب لا غير ولان تركيب المجسمة من زواياه لا اربع ممتنع لان ذلك يساوي اربع قوائم

ثالثا واخيرا اذا كان وجهه مخمسا منتظما فالمجسمة منه لا تتركب الا من ثلاث الزوايا منه فيحصل المنتظم ذو الاثنى عشرة قاعدة فقط

لا منتظم غير هذه الخمسة المرقومة • لان ثلاثة زوايا من المسدس تساوي اربع قوائم والمسبع ابلغ ومن ثمة لا يمكن احداث المجسمة بها

وثلاثة من تلك الخمسة تحاط بالمثلث المتساوي الاضلاع وواحد بالاربع والآخر

بالمخمس

بالخمس كما صرح به

تنبيه اذا علم أحد وجوه المنتظم يمكن تحديد سائر اقسامه وتحقيق الخمسة اجسام المرقومة وبيان انشائها نذكر في هذه الدعوى الآتية

•(الدعوى الثانية العملية)•

طريق انشاء كثير القواعد المنتظم اذا علم أحد وجوهه او ضلعه فقط

وهذه الدعوى تحل مشكلات تلك الاجسام الخمس على التوالي

انشاء ذي الاربع قواعد المنتظم

(شكل ٢٤٣) اذا فرض مثلث ا ب ح المتساوي الاضلاع وجهاله يقام عمود ع س على مستوى ا ب ح من نقطة ع مركز المثلث المذكور ويعين هذا العمود في نقطة س بان يكون ا س = ا ب ووصل س ب و س ح فهرم س ا ب ح هو الجسم المطلوب

لان ابعاد ع ا و ع ب و ع ح متساوية فتتساوى موائل س ا و س ب و س ح لتساوي ابعادها من عمود س ع ومن كون س ا = ا ب كانت الوجوه الاربعة من ذلك الهرم مساوية لمثلث ا ب ح المعلوم وايضا تكون زواياه المجسمة متساوية لتركيب كل واحدة منها من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية وحيث تساوت الوجوه والزوايا المجسمة من هذا الهرم قد صار منتظما وثبت المطلوب

انشاء ذي الست قواعد المنتظم

(شكل ٢٤٤) اذا كان ا ب ح د مربعا معلوما وانشئ منشور قائم على قاعدة ا ب ح د المرقومة وارتفاعه ا هـ مساو لضلع ا ب وحيث ان وجوه هذا المنشور مربعات متساوية وكل واحدة من زواياه المجسمة قد تركبت من ثلاث الزوايا القوائم فهي ايضا متساوية ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون ذلك المنشور المنتظم ذا ست قواعد المنتظم اي المكعب

انشاء المنتظم ذي الثمان قواعد

(شكل ٢٤٥) اذا كان مثلث ا م ب متساوي الاضلاع معلوما ورسم مربع

اسحد على ضلعه اب ويقام عمود طس من مركز ع على مستوى ذلك المربع وتتعين نهايتاه ط و س بان تكون ع ط = ع س = اع ثم اذا وصلت خطوط س ا و س ب و ط ا الخ فجسم س ا ب ح د ط المركب من هرمى س ا ب ح د و ط ا ب ح د الرباعيين المتلاصقين المشتركين فى قاعدة ا ب ح د هو المنتظم ذو الثمان قواعد المطلوب ولقيام مثلث اع س فى نقطة ع وكذا مثلث اع د فاضلاع اع و ع س و ع د تتساوى فلذا وجب تساوى ذينك المثلثين ويصير ا س = ا د وبهذا ثبت ان يكون كل من مثلثات اع ط و ب ع س و ح ع ط الخ الاخر مساو لمثلث اع د القائم الزاوية ومن اجل ذلك تساوت كافة اضلاع اب و اس و اط الخ فتبين ان جسم س ا ب ح د ط احيط بثمانية مثلثات متساوية الاضلاع كل واحد منها يساوى مثلث اب س متساوى الاضلاع المعلوم فضلا عن تساوى جميع الزوايا المجسمة منه مثلا زاوية س مساوية لزاوية ب

لانه يرى التساوى بين مثلثى س ا ح و د ا ح وقيام زاوية اب ح فشكل س ا ط ح يصير مربعا يساوى مربع ا ب ح د واذا قدرهرم ب س ح ط بهرم س ا ب ح د فقد يمكن اذا تطبيق قاعدة ا س ح ط من الاول على قاعدة ا ب ح د من الثانى ولاشتراك مركز ع حينئذ ينطبق ارتفاع ع ب من الاول على ارتفاع س ع من الثانى فوجب الاتحاد التام بين هذين الهرمين ومن ثمة صارت مجسمة س مساوية لمجسمة ب وثبت المطلوب من ان يكون جسم س ا ب ح د ط منتظما ذا ثمان قواعد

(تنبيه) اذا تقاطعت خطوط ا ح و ب د و س ط عمادا فى اواسطها فنهايات تلك الخطوط الثلاثة تكون رؤسا للمنتظم المرقوم فتأمل

انشاء المنتظم ذى الاثنى عشرة قاعدة

(شكل ٢٤٦) اذا كان ا ب ح د هـ مخمسا منتظما معلوما وكان كل واحدة من زاويتى ا ب ف و ح ب ف مساويا لزاوية ا ب ح وتشكلت بهذه الزوايا المسطحة زاوية ب المجسمة وتعين الانحراف بين كل اثنين من تلك

المسطحات الثلاث كما مر فى الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة ويسمى ذلك الانحراف ق وكذلك اذا اجرى العمل بانشاء زوايا مجسمة فى نقط ح ى و هـ و ا مساوية لزاوية ب المجسمة فستوى ح ب ف يتحد بمستوى ب ح ر لان الانحراف بين كل منهما وبين مستوى ا ح ى هو عين مقدار ق فقد امكن اعمال مخمس ب ح ر و ف مساويا لمخمس ا ح ى هـ فى مستوى ف ب ح ر واذا اجرى عين هذا العمل فى كل من مستويات ح ى ط و ى هـ ل الخ الاخر يحصل سطح محدب ف ر ح الخ مركب من ستة اشكال مخمسة منتظمة متساوية وكل انحراف واقع بين كل متجاورين هو قدر المعين بمقدار ق

فاذا كان ف ر ح الخ سطحا ثانيا يساوى سطح ف ر ح الخ فاذا الصق احدهما بالآخر حدث من هذا الالصاق سطح محدب واحد متوال بلا انفصال مثلا لاجل تشكيل زاوية ف المساوية لزاوية ب المجسمة الاخرى توصل زاوية ع ف و بزاويتى ع ف ب و ب ف و ولا يزال الانحراف بين مستوبى ب ف و و ب ف ع عند الاتصال باقيا بلا تغير

لانه هو الانحراف الذى يلزم عند تشكيل ثلاث المجسمة لكن عند تشكيل زاوية ف المجسمة ينطبق ضلع ف و على ف و المساوى له وباجتماع زوايا ف و ر و ف و هـ و هـ و ر الثلاث المسطحة بعضها فى نقطة و تتشكل زاوية مجسمة مساوية لكل واحد من الزوايا المجسمة المرسومة التى تقدمت ويحصل هذا الاتصال من غير تبديل لا فى زاوية ف ولا فى سطح هـ و ر ح الخ حيث تقدم تلاصق مستوبى ف و ر و هـ و ف فى نقطة ف وقد تبين ان الانحراف بينهما مساو لمقدار ق وكذا ما بين مستوبى هـ و ر و هـ و ف فاذا اجرى العمل تتابعا بالالصاق وتوافقا بالتلاصق مثنى يحدث بذلك سطح منكسر متوال بلا انفصال فيه ترى انه سطح واحد وهو سطح كثير القواعد المنتظم ذو اثنى

عشرة قاعدة لانه مركب من اثنى عشر مخمسا منتظما وجميع الزوايا المجسمة فيه متساوية

انشاء المنتظم ذى العشرين قاعدة

(شكل ٢٤٧) اذا كان مثلث ا ب ح المتساوى الاضلاع أحد وجوهه اولا تنشأ زاوية مجسمة بخمس مستويات تؤخذ كل واحد منها مساويا لمستوى ا ب ح بان تكون انحرافاتها التى بين كل مستو ومجاوره متساوية ولاجل اجراء ذلك يرسم مخمس بَ حَ عَ طَ دَ على ضلع بَ حَ المساوى اضلع ب ح ويقام عمود من مركزه على مستويه ويتعين هذا العمود فى نقطة أَ على ان يكون أَبَ = بَ حَ فاذا وصل خط أَحَ و أَعَ وأَطَ وأَدَ فزاوية أَ المجسمة المحاطة بزوايا بَ أَحَ و حَ أَعَ الخ الخمسة المسطحة هى المجسمة المطلوبة * لان موائل أَبَ و أَحَ الخ متساوية وما ئل أَبَ مساوى ضلع بَ حَ فمثلثات بَ أَحَ و حَ أَعَ الخ تكون متساوية وكل يساوى مثلث ا ب ح المفروض

ويرى ان الانحرافات بين كل مستو ومجاوره من مستويات بَ أَحَ و حَ أَعَ الخ متساوية لان زوايا ب و ح الخ المجسمة متساوية * حيث تركبت كل واحدة منها من آحاد زوايا المخمس المنتظم ومثنى زوايا المثلث المتساوى الاضلاع

فاذا سمى انحراف المستوين المتساويى الزوايا ى وتعين بما ذكر فى الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة حينئذ زاوية ى تكون هى الانحراف من كل مستو على صاحبه من المستويات التى تحيط بزاوية أَ المجسمة فاذا علمت ما ذكرنا وانشئت مجسمات فى نقط ا و ب و ح الثلاث كل واحدة منها مساوية لمجسمة أَ فيحدث د هـ و الخ سطح محدب تركب من عشر مثلثات متساوية الاضلاع ميل كل واحد منها على صاحبه يساوى مقدار ى و د و هـ و و الخ زوايا دوره تجمع مرة من مثانى ومرة اخرى من مثالث زوايا المثلث المتساوى

الاضلاع

الاضلاع

فاذا تصور مجدب ثان يساوى مجدب د ه و ر الخ ووضع احدهما على الآخر اصقابان تأتى ذات المثانى من احدهما على ذات المثالث من الآخر وحيث ان الانحراف بين كل مجاورين من تلك المستويات الذى هو ى يوافق الزاوية المجسمة ذات الوجوه الخمس المساوية لزاوية أ فمن هذا الالصاق الواقع من غير تبديل ولا تغيير يحدث سطح محدب متوال لا قطور فيه مركب من عشرين مثلثا متساوية الاضلاع وهو سطح كثير القواعد المنتظم ذى العشرين قاعدة وجميع زواياه المجسمة تكون متساوية

(الدعوى الثالثة العملية)

طريق وجود الانحراف بين الوجهين المتجاورين من منتظم كثير القواعد هذا ينتج من الاعمال السابقة فى الاشكال الخمسة الافلاطونية المتقدمة مع ماصرح به فى الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة وهو ان تتعين الزاوية بين المستويين من زاوية مجسمة وزواياها المسطحة الثلاث معلومة

(شكل ٢٤٣) تتشكل المجسمة من ذى اربع قواعد بثلاث زوايا مثلث متساوى الاضلاع فعلى ماصرح به فى الرابعة والعشرين المرقومة تستخرج الزاوية التى بين المسطحات وبذلك يصير استنتاج ذلك الانحراف

(شكل ٢٤٤) الزاوية المجسمة الواقعة بين المتجاورين فى ذى ستة قواعد قائمة

(شكل ٢٤٥) الزاوية المجسمة فى ذى ثمان قواعد حيث تشكلت من زاويتى المثلث المتساوى الاضلاع وقائمة فالانحراف بين زاويتى المثلث هو انحراف وجهى الجسم المذكور

(شكل ٢٤٦) حيث تشكلت المجسمة فى ذى اثنى عشرة قاعدة من ثلاث زوايا المخمس المنتظم فالانحراف بين كل اثنتين منها هو انحراف وجهى الجسم المرقوم

(شكل ٢٤٧) حيث تشكلت الزاوية المجسمة فى ذى عشرين قاعدة من مثنى زوايا المثلث المتساوى الاضلاع وآحاد زوايا المخمس فالانحراف بين زاويتى

المثلث هو انحراف وجهى الجسم المرقوم

(الدعوى الرابعة العملية)

طريق استخراج نصف قطر الكرة المرسومة داخل كثير القواعد المنتظم ونصف الكرة المرسومة عليه وضلعه معلوم

اولا لابد من اثبات ان كل منتظم كثير القواعد يمكن رسمه داخل الكرة وخارجها

(شكل ٢٤٨) اذا كان اب ضلعا مشتركا بين وجهى كثير القواعد المنتظم و ح و ه مركزى ذينك الوجهين فعمودا دح و ده النازلان من المركزين على ضلع اب المشترك يلتقيان ويقعا فى نقطة د وسطه ويحدث زاوية بين هذين العمودين مساوية لانحراف السطحين المتجاورين المعينين كما ذكر فى الدعوى العملية السابقة فاذا أخرج عمودا حع و هع من غير تحديد على حد و هد فى مستوى حده فيلتقيان فى نقطة ع وهى مركز الكرة المرسومة داخلا وخارجا ونصف قطر الاولى حع ونصف قطر الثانية ع ا ولتساوى حد و ده وهما البعد بين المركزين واشتراك وتر دع وقع التساوى بين مثلثى حدع و ع ده قائمى الزاوية (مقالة ١) فعمود حع يساوى عمود عه ومن حيث ان ضلع اب عمود على مستوى حده فستوى اح عمود على مستوى حده وهو أيضا عمود عليه (مقالة ٥) ويكون خط حع فى مستوى حده عمودا على حد فصل مشترك مستويى حده و اح فهو عمود على مستوى اح (١٨ مقالة ٥) وكذلك يصير خط هع عمودا على مستوى اه فعلم ان عمودى حع و هع المخرجين فى مستويى الوجهين المتجاورين من مركزيهما يلتقيان فى نقطة ع ويكونان متساويين*

الآن اذا جعلت وجهى اح و اه المتجاورين أى وجهى المنتظم فلا يزال حد بعد المركز على ما هو عليه من الكبر وكذا زاوية حدع نصف زاوية حده ومن أجل هذا تساوى مثلث حدع وضلعه عح فى جميع

وجوه كثير القواعد
فعلى هذا اذا رسمت كرة نصف قطرها ع ح ومركزها ع فتمر بجميع مراكز وجوه كثير القواعد على طريق القياس (لأن مستويي اح و اه عودان على نهاية نصف القطر) وتلك الكرة هي المرسومة داخل كثير القواعد أو كثير القواعد هو المرسوم عليها فاذا وصل مائلا ع ا و ع ب يكونان متساويين لافتراقهما عن العمود متساويي الابعاد حيث كان حا = حب وكذا كل خطين مائلين يصلان من مركز ع الى نهايتي ضلع مّا

فجميع تلك الموائل متساوية فاذا جعلت ع مركزا ورسم سطح كرة بنصف قطر ع ا فهذا السطح يمر بجميع رؤس زوايا كثير القواعد والكرة هي المرسومة فوق المنتظم ويقال له المرسوم داخل الكرة فاذا علمت ذلك فلا عسر في اجراء العمل من تلك الدعوى كما سيأتي

ثانيا (شكل ٢٤٩) اذا علم أحد اضلاع وجه من كثير القواعد ورسم ذلك الوجه وبعد المركز فيه حء فيستخرج الانحراف بين الوجهين المتجاورين من كثير القواعد كما صرح به في الدعوى التي تقدمت وتنشأ زاوية ءه مساوية له ويؤخذ ءه مساويا للخط حء ويقام عود حع وهع على حء و هء فهذان العمودان يلتقيان في نقطة ع و حع يكون هو نصف قطر الكرة المرسومة داخل كثير القواعد فاذا أخذ حا مساويا لنصف قطر الدائرة المرسومة فوق وجه من وجوه كثير القواعد على استقامة حء المخرج يكون ع ا هو نصف قطر الكرة المرسومة على المنتظم

لان مثلثي حءع و حاع قائمي الزاوية المذكورين في الشكل ٢٤٩ هما عين المرقومين في الشكل ٢٤٨ فضلا عن ان يكون خطا حء و حا نصفي قطر للدائرة المرسومة في احد وجوه كثير القواعد والمرسومة عليه وان يكون ع ح و ع ا نصفي قطر للكرتين المرسومتين داخل المنتظم وخارجه

(تنبيه) قد استخرج من الدعاوى التي تقدمت نتائج
أولا انه يمكن تقسيم كل منتظم الى اهرام متساوية مشتركة رؤسها في نقطة هي

مركز المنتظم فضلا عن كونها مركز الكرة المرسومة داخله وخارجه
ثانيا ان مساحة كثير القواعد المنتظم مساوية لحاصل ضرب سطحه فى ثلث نصف قطر الكرة المرسومة داخله
ثالثا ان كثيرى القواعد المنتظمين متحدا الاسم يسميان جسمين متشابهين وتتناسب اضلاعهما المتناظرة فالنسبة بين انصاف اقطار الكرات المرسومة داخلهما وخارجهما كالنسبة بين اضلاعهما
رابعا انه اذا رسم جسم كثير القواعد منتظم داخل الكرة فالمستويات المرسومة من مركزه بطول اضلاعه المتعددة تقسم سطح الكرة الى مضلعات متساوية متشابهة بعدد وجوه المنتظم ولله الحمد والمنة على كل حال والصلاة والسلام على سيدنا محمد بالغدو والآصال وبه ثقتى

(المقالة الثامنة)

فى الاجسام المستديرة الثلاث

الحدود

١ (شكل ٢٥٠) الجسم الحاصل من دوران مستطيل نحو ا ب ح د حول ضلعه ا ب الثابت يسمى اسطوانة وفى هذه الحركة لايزال ضلعا ا د و ب ح عمودين على ا ب ويرسمان دائرتى د ح ف و ح ر ك المتساويتين وتسميان قاعدتى الاسطوانة وضلع ح د يرسم السطح المحدب وضلع ا ب الثابت يسمى محور الاسطوانة

كافة المقاطع المنشاة عمادا على المحور نحو ن ل م هى دوائر وكل واحدة منها تساوى القاعدة لانه متى ذور مستطيل ا ب ح د حول ضلع ا ب فخط ط ن العمود عليه يرسم مستويا محيطيا يساوى القاعدة وماهو الا المقطع المنشا عمودا على المحور فى نقطة ط

كافة المقاطع المنشاة تبعا للمحور نحو ف ك ر ح يكون ضعف ا ب ح د المستطيل الاصلى

٢ (شكل ٢٥١) الجسم الحادث من دوران مثلث س ا ب القائم الزاوية حول ضلعه الثابت س ا يسمى مخروطا ويرسم ضلع ا ب مستويا محيطيا أعنى دائرة تسمى قاعدة المخروط ووتر س ب يرسم سطحه المحدب فنقطة س تسمى رأس المخروط وخط س ا محور المخروط او ارتفاعه وخط س ب يسمى ضلعا أو خطا واصلا

المقطع المنشا عمودا على المحور نحو ح ف و ط دائرة * والمقطع المنشا تبعا للمحور نحو مثلث س د ه المتساوى الساقين فهو ضعف مثلث س ا ب الاصلى

٣ اذا طرح مخروط س و ن ع من مخروط س ح د ب بمقطع يوازى

قاعدته فالجسم الباقي اعني حـ ـ ح و يسمى مخروطاناقصا وهو مايحصل من دوران شبه منحرف ا ـ ح و القائم الزاويتين ا و ـ حول ضلع ا و الثابت فخط ا و المرقوم يسمى محور المخروط الناقص أوارتفاعه ودائرتا ـ و ح و ح و ق تسمى قاعدتي المخروط الناقص وخط ـ ح يسمى ضلع المخروط

٤ الاسطوانتان أوالمخروطان المتشابهان هماما كانت النسبة بين محوريهما كالنسبة بين نصفي قطري قاعدتيهما

٥ (شكل ٢٥٢) اذا رسم مستقيم الاضلاع ا ـ حـ و هـ داخل دائرة ا حـ و قاعدة الاسطوانة واقيم منشور قائم على تلك القاعدة بقدر ارتفاع الاسطوانة فيقال له المنشور المرسوم داخل الاسطوانة ويقال لها الاسطوانة المرسومة على المنشور

وحيث ان حروف ا و ـ و حـ ح الخ من المنشور عماد على مستوى القاعدة فهي منحصرة في السطح المحدب من الاسطوانة فلذا كان المنشور مماسا للاسطوانة بحروفه

٦ (شكل ٢٥٣) وايضا اذا رسم شكل ا ـ حـ و مستقيم الاضلاع على قاعدة الاسطوانة واقيم منه منشور قائم بقدر ارتفاع الاسطوانة فيقال له المنشور المرسوم على الاسطوانة ويقال لها الاسطوانة المرسومة داخل المنشور

اذا كانت م و ن الخ نقط تماس لاضلاع ا ـ و ـ حـ الخ واقيم من تلك النقط عماد م ش و ن ـ الخ على مستوى القاعدة فهذه العمد توجد في سطح الاسطوانة وفي سطح المنشور المرسوم عليها معا فلذا كانت تلك الاعمدة خطوط تماس بينهما اعلم ان الاسطوانة والمخروط والكرة هي الاجسام المدورة الثلاث المتعارفة في اصول الهندسة

(فوائد مقدمة على السطوح)

الفائدة ١

(شكل ٢٥٤) سطح ع ا ـ حـ و المستوي المحدود بدور ا ـ حـ و اصغر من

كل سطح سواء يكون محدودا به نحو ف ا ـ ح ى

وذلك لا خفاء فيه من حيث انه من قبيل العلوم المتعارفة لانه يجرى مجرى الخط المستقيم بين سائر الخطوط من حيث انه أصغر بعد بين النقطتين فالسطوح المستديرة على دور واحد أصغرها ما كان مستويا وانما تقليل العلوم المتعارفة من خصائص علم الهندسة

وسنذكر اثبات هذه القضية بأكد وجه حتى لا يبقى الى الشبهة مجال فنقول السطح امتداد قد امتد طولا وعرضا فلا يكون أكبر من سطح آخر الا اذا كانت جميع أجزاء امتداده أكبر من اجزاء امتداد ما هو أكبر منه ومتى كان اجزاء سطح أصغر من اجزاء الآخر من كل الوجوه فلا جرم انه يكون أصغر منه فاذا مر بمستوى ـ ف ى من أى جهة على ان يقطع السطح المستوى فى ـ ى والآخر فى ـ ف ى فلا يزال ـ ى المستقيم أصغر من خط ـ ف ى فلذا تبين ان مستوى ع ا ـ ح ى أصغر من سطح ف ا ـ ح ى ذى الفجوات

الفائدة ٢

(شكل ٢٥٥) سطح ع ا ـ ح ى المحدب المحدود بدور ا ـ ح ى المحاط أصغر من كل سطح آخر محدود به محيط

والمراد من المحدب ما لا يقطعه المستقيم الا فى نقطتين اثنتين فقط فكرر هنا وان كان سبق ذكره انما يمكن تطبيق الخط المستقيم على سطح محدب فى بعض الجهات كمال الانطباق وتلك الامثلة لا توجد الا فى الاسطوانة والمخروط والتسمية بالمحدب لم تكن مخصوصة بالسطح المنحنى فقط بل تعم سطوح كثير السطوح وما تركب من سطوح مستوية وما كانت سطوحه أو بعض اجزائه سطحا منحنيا والآخر كثير السطوح

فاقول ان لم يكن سطح ع ا ـ ح ى أصغر من كل سطح يحيط به وكان الاصغر هو سطح ف ا ـ ح ى وكان فى النهاية يساوى سطح ع ا ـ ح ى ومر بمستو على أن لا يقطع سطح ع ا ـ ح ى بل يمسه فى نقطة ع فقط فهذا المستوى يلاقى مستوى ف ا ـ ح ى والقسم الذى فصل منه يكون أصغر من المستوى الفاصل

(فائدة ١) فيبقى ما بقى من سطح ف ا ـ ح ء ويؤخذ المستوى الفاصل بدلا عن القسم المنفصل فالسطح الحاصل من الباقى والبدل لا يزال محيطا بسطح ع ا ـ ح ء وأصغر من سطح ف ا ـ ح ء ولقد فرض انه هو الاصغر من كل ما عداه فالفرض باطل فلذا ثبت المطلوب من أن يكون سطح ع ا ـ ح ء المحدب أصغر من كل سطح محيط به مستندا على دوره ا ـ ح ء أى محدودا به ومنتهيا اليه

(تنبيه) (شكل ٢٥٦) وكذا نثبته بادلة مشابهة لمثل هذا البرهان المرقوم فنقول أولا اذا كان السطح المحدب محدودا بدورى ا ـ ح و ء هـ و والسطح الآخر محدودا بهما أيضا وكان محاطا فالمحاط أصغرهما

ثانيا اذا كان سطح ا ـ المحدب محاطا من كل جهة بسطح م ن الآخر فالمحاط أصغر سواء كان بينهما نقط مشتركة أو خطوط أو سطوح أو لم يوجد لانه لا يوجد هنا ما هو أصغر من الجميع سوى ما ذكر حيث يمكن رسم مستوى ح ء مماسا للذات المحدب فى كل حال وهذا المستوى أصغر من سطح ح م ء (فائدة ١) وحيث كان سطح ح ن ء أصغر من سطح م ن وهذا بخلاف ان يفرض سطح م ن أصغر الجميع فقد تبين ان سطح ا ـ المحدب المحاط أصغر مما أحاط به

(الدعوى الاولى النظرية)

مساحة جسم الاسطوانة مساو للحاصل ضرب قاعدتها فى الارتفاع

(شكل ٢٥٨) اذا كان ح ا نصف قطر قاعدة اسطوانة معلومة و ع ارتفاعها وجعل لفظ سطح ح ا علما لسطح الدائرة التى نصف قطرها ح ا فالمساحة الجسمية من الاسطوانة تكون سطح ح ا × ع

لانه لو لم يكن سطح ح ا × ع مساحة جسمية لها لكان مساحة الاسطوانة أكبر او اصغر منها * فنقول اولا لو فرض انه مساحة الاسطوانة اصغر منها كالاسطوانة التى نصف قطر قاعدتها ح ء وارتفاعها ايضا ع ونرسم فوق الدائرة التى نصف قطرها ح ء كثير الاضلاع ر ح ط ف المنتظم بحيث لا تلتقى اضلاعه بمحيط الدائرة التى نصف قطرها ح ا (١٠ مقالة ٤) ثم نصور ارتساما منشورا قائم قاعدته ر ح ط ف كثير الاضلاع وارتفاعه ع فهذا

المنشور هو ما كان مرسوما فوق الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها جـ ء
فمساحته الجسمية تساوى حاصل ضرب قاعدته ر ح ط ف فى ارتفاعه ع
(١٤ مقالة ٦) فالمساحة الجسمية من هذا المنشور تكون أصغر من سطح جـ ا × ع
لكون قاعدة ر ح ط ف أصغر من الدائرة التى نصف قطرها جـ ا مع اتحاد
الارتفاع فيهما لكن قد فرض ان سطح جـ ا × ع مساحة للاسطوانة التى
داخل المنشور فعلى هذا لزم ان يكون المنشور اصغر من الاسطوانة التى أحاط
بها وهذا أكبر محال
لان الاسطوانة مرسومة داخل المنشور وهو محتو عليها فلا يكون الا أكبر منها
فاستحال ان يكون حاصل سطح جـ ا × ع مساحة للاسطوانة التى
نصف قطر قاعدتها جـ ء وارتفاعها ع وعلى العموم وا كد الوجوه
ان حاصل ضرب قاعدة الاسطوانة فى ارتفاعها لا يكون مساحة جسمية
لاسطوانة أصغر منها
ثانيا ان ذلك الحاصل عينه لا يكون مساحة لاسطوانة أكبر من تلك الاسطوانة
أصلا
لانه لو فرض جـ ء نصف قطر القاعدة الاسطوانة المعلومة احترازا عن كثرة
الاشكال وانه يمكن جعل حاصل سطح جـ ء × ع مساحة جسمية لاسطوانة
أكبر منها * كالاسطوانة التى نصف قطر قاعدتها جـ ا وارتفاعها ع
ثم اجرى العمل كما فى الشق الاول فمساحة المنشور المشكل فوق الاسطوانة
المعلومة تكون ر ح ط ف × ع ومن كون شكل ر ح ط ف أكبر من
الدائرة التى نصف قطرها جـ ء فالمساحة الجسمية من المنشور تكون أكبر من
حاصل سطح جـ ء × ع وقد فرض مساحة للاسطوانة التى نصف قطر
قاعدتها جـ ا وارتفاعها ع فلزم ان يكون المنشور أكبر من الاسطوانة التى
أحاطت به وهو محال ولا جرم انه اصغر منها ومن ثمة تبين انه لا يمكن ان يكون
حاصل ضرب قاعدة اسطوانة فى ارتفاعها مساحة جسمية لاسطوانة أكبر منها
والمعنى انه قد ثبت المطلوب من ان تكون المساحة الجسمية من الاسطوانة تساوى

حاصل ضرب قاعدتها فى ارتفاعها

(نتيجة ١) الاسطوانات المتحدة الارتفاع النسبة بينها كالنسبة بين قواعدها والنسبة بين متحدة القواعد كالنسبة بين ارتفاعاتها

(نتيجة ٢) النسبة بين الاسطوانات المتشابهة كالنسبة بين مكعبات ارتفاعاتها أو كالنسبة بين مكعبات اقطار قواعدها * لان نسبة القواعد الى بعضها كنسبة مربعات الاقطار الى بعضها وحيث تشابهت الاسطوانات كانت النسبة بين أقطار قواعدها كالنسبة بين ارتفاعاتها (حد ٤) فلذا كانت نسبة القواعد كنسبة مربعات الارتفاعات ومن ثمة تبين ان تكون نسبة حواصل ضرب القواعد فى الارتفاعات أو نسبة نفس الاسطوانات كنسبة مكعبات ارتفاعاتها

تنبيه اذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة ر وارتفاعها ع فمساحة قاعدة الاسطوانة ط ر^{٢} (١٢ مقالة ٤) والمساحة الجسمية لها ط ر^{٢} × ع أو ط ر^{٢} ع

(الدعوى الثانية الفائدة)

السطح المحدب من المنشور القائم يساوى حاصل ضرب محيط قاعدته فى ارتفاعه (شكل ٢٥٢) لان هذا السطح مساو لمجموع مستطيلات او ز ب و ب ز ح ح و ح ح ط ى الخ التى تركب منها حيث ان او و ب و و ح ح الخ التى هى ارتفاعات تلك المستطيلات مساوية لارتفاع المنشور ومجموع قواعدها كافة ا ب و ب ح و ح ى الخ هى اضلاع قاعدة المنشور فقد تبين ان مجموع المستطيلات أو السطح المحدب من المنشور القائم مساو لحاصل ضرب محيط قاعدته فى ارتفاعه

(نتيجة) اذا اتحد الارتفاع فى المنشورين القائمين فالنسبة بين محدبيهما كالنسبة بين محيطى قاعدتيهما

(الدعوى الثالثة الفائدة)

السطح المحدب من الاسطوانة اكبر من كل محدب المنشور رسم داخلها واصغر

من كل محدب لمنشور رسم خارجها
(شكل ٢٥٢) لان الطول فى محدب الاسطوانة ومحدب منشور ا ـ ح ء ه و المرسوم داخلها واحد حيث ان المقاطع المنشأة فيهما الموازية لحرف او مساوية له ولاجل تقدير عرضهما اقول اذا قطعا بسطوح مستوية توازى مستوى القاعدة وتكون عمدا على حرف او فاحد هذين المقطعين يساوى محيط القاعدة والآخر يساوى دور كثير الاضلاع ا ـ ح ء ه وحيث ان عرض سطح الاسطوانة اكبر من عرض سطح المنشور مع اتحاد الطول فيهما تبين ان يكون السطح الاول اكبر من الثانى
(شكل ٢٥٣) وبمثل ما تقدم من الادلة والبراهين يثبت ان يكون السطح المحدب من الاسطوانة اصغر من سطح محدب منشور ـ ح ء ى ل ع المرسوم خارجها

(الدعوى الرابعة النظرية)

السطح المحدب من الاسطوانة مساو لحاصل ضرب محيط قاعدتها فى ارتفاعها
(شكل ٢٥٨) اذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المفروضة حا وارتفاعها ع وجعل لفظ محيط حا علما على محيط الدائرة التى نصف قطرها حا فمساحة محدب الاسطوانة يكون محيط حا × ع
لانه ان لم يكن كذلك لزم ان يكون حاصل محيط حا × ع مساحة لمحدب اسطوانة اكبر او اصغر منها فنقول اولا اذا فرض انه مساحة لمحدب اسطوانة اصغر منها اى لمحدب الاسطوانة التى نصف قطر قاعدتها حء وارتفاعها ايضا ع يرسم كثير الاضلاع المنتظم د ح ط ف على الدائرة التى نصف قطرها حء بان لا يلتقى بالمحيط الذى نصف قطره حا وبعد ذا اذا تصور منشور قائم على ان تكون قاعدته د ح ط ف وارتفاعه ع فالمحدب منه يساوى حاصل ضرب دور د ح ط ف فى ارتفاع ع (٢) وحيث كان هذا الدور اصغر من محيط حا كان المحدب من المنشور اصغر من حاصل محيط حا×ع ولكنه فرض مساحة لمحدب الاسطوانة التى نصف قطر قاعدتها حء ومن كون هذه الاسطوانة مرسومة داخل المنشور يلزم ان يكون محدب المنشور اصغر من محدب

الاسطوانة المرسومة داخله وهذا محال والحق بخلافه (٣) فلذا استحال ما قد فرض وتبين ان حاصل ضرب محيط قاعدة الاسطوانة فى ارتفاعها لا يكون مساحة لمحدب اسطوانة اصغر منها

ثانيا ان عين هذا الحاصل المرقوم لا يكون مساحة لمحدب اسطوانة أكبر منها لانه اذا فرض حء نصف قطر لقاعدة الاسطوانة المعلومة اختصارا للافادة وقيل ان حاصل محيط حء × ع مساحة لمحدب اسطوانة ارتفاعها ع ومحيط قاعدتها اكبر من محيط القاعدة المفروضة مثلا لمحدب الاسطوانة التى نصف قطر قاعدتها حا واجرى العمل كما صرح به فى الحال الاول فلا يزال محدب المنشور مساويا لحاصل ضرب اطراف كثير الاضلاع د ح ط ف فى ارتفاع ع ولكون هذا الدور اكبر من محيط حء يكون محدب المنشور اكبر من حاصل محيط حء × ع وقد فرض هذا الحاصل مساحة لمحدب الاسطوانة التى نصف قطر قاعدتها حا فعلى هذا يلزم ان يكون محدب المنشور اكبر من محدب الاسطوانة التى أحاطت به وهذا محال (٣) ومن اجل ذلك ظهر ان حاصل ضرب محيط قاعدة اسطوانة فى ارتفاعها لا يكون مساحة لمحدب اسطوانة اكبر منها ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون محدب الاسطوانة مساويا لحاصل ضرب محيط قاعدتها فى الارتفاع

(الدعوى الخامسة النظرية)

المساحة الجسمية من المخروط تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ثلث ارتفاعه

(شكل ٢٥٩) اذا كان سع ارتفاع المخروط المعلوم و اع نصف قطر قاعدته وجعل لفظ سطح اع علما للسطح قاعدته فمساحته الجسمية تساوى حاصل ضرب سطح اع × $\frac{1}{3}$ سع

فنقول أولا ان قيل ان حاصل سطح اع × $\frac{1}{3}$ سع مساحة لمخروط أكبر مثلا للمخروط الذى نصف قطر قاعدته عب الاكبر من اع مع دوام بقاء ارتفاع سع ورسم على الدائرة التى نصف قطرها اع كثير الاضلاع م ك ف ط المنتظم على أن لا يلتقى بالمحيط الذى نصف قطره عب (١٠ مقالة ٤) ثم يرسم

هرم يكون المنتظم المرقوم قاعدته ورأسه واقعة أيضا فى نقطة س فالمساحة الجسمية لهذا الهرم تساوى حاصل ضرب مساحة كثير الاضلاع م ن ف ط فى ثلث ارتفاعه س ع (١٩ مقالة ٦) لكن حيث ان كثير الاضلاع المرقوم اكبر من سطح الدائرة المرسومة داخله المشار اليها بسطح ع ا علم ان الهرم اكبر من حاصل سطح ا ع $\times \frac{1}{3}$ س ع وقد فرض هذا المقدار مساحة للمخروط الذى رأسه س ونصف قطر قاعدته ع ب وهو ما كان مشتملا على الهرم المذكور وهذا محال ان يكون المحوى اكبر مما حواه والحق بخلافه

ومن ثمة لا يكون حاصل ضرب القاعدة فى ثلث الارتفاع مساحة لجسم مخروط اكبر مما هو مفروض

ثانيا ان الحاصل المرقوم لا يكون مساحة لجسم مخروط اصغر منه ولئلا يتغير الشكل يجعل ع ب نصف قطر قاعدة المخروط المفروض فان قيل انه يمكن ان يكون حاصل سطح ع ب $\times \frac{1}{3}$ س ع مساحة للمخروط الذى نصف قطر قاعدته ع ا فيجرى العمل كما صرح به فى الشق الاول فحاصل ضرب مساحة م ن ف ط السطحية فى ثلث س ع هو المساحة الجسمية للهرم س م ن ف ط لكن مساحة م ن ف ط اصغر من سطح ع ب فعلم ان مساحة جسم الهرم اصغر من حاصل سطح ع ب $\times \frac{1}{3}$ س ع الذى فرض انه مساحة للمخروط الذى نصف قطر قاعدته ا ع وارتفاعه س ع فلزم ان يكون الهرم اصغر من المخروط الكائن داخله وهذا محال والحق بخلافه

فتبين ان حاصل ضرب مساحة قاعدة مخروط فى ثلث ارتفاعه لا يكون مساحة لمخروط أصغر منه كما لا يخفى ومن أجل ذلك ظهر ان مساحة قاعدة المخروط مضروبة فى ثلث ارتفاعه لا تكون مساحة لجسم مخروط أكبر منه بل انه مساحة ذاته وثبت المطلوب

نتيجة المخروط ثلث الاسطوانة التى اتحدبها قاعدة وارتفاعا ومن هذا نتج ما سيأتى

اولا ان النسبة بين المخاريط المتساوية الارتفاع كالنسبة بين قواعدها

وثانيا ان النسبة بين المخاريط المتساوية القواعد كالنسبة بين ارتفاعاتها

وثالثا ان النسبة بين المخاريط المتشابهة كالنسبة بين مكعبات اقطار قواعدها وكالنسبة بين مكعبات ارتفاعاتها

تنبيه اذا كان ر نصف قطر قاعدة مخروط و ع ارتفاعه فمساحة جسمه تكون ط ر٢ × ١/٣ ع أو ١/٣ ط ر٢ع

(الدعوى السادسة النظريه)

(شكل ٢٦٠) اذا كان اع و دف نصفى قطرى قاعدتى مخروط اده ب الناقص و ف ع ارتفاعه فمساحة جسمه تكون ١/٣ ط × ع ف × (اع٢ + دف٢ + اع × دف)

فاذا كان ط و رح هرما مثلثيا يكافئ مخروط س ا ب بان تكون قاعدته و رح مقاومة لقاعدة المخروط مع تساوى الارتفاع فيهما وامكن فرض كون قاعدتيهما موضوعتين على مستو واحد تتساوى ابعاد رؤسهما س و ط من مستوى القاعدة فاذا مد مستوى هـ ف د وحدث مقطع ى ك ل فى الهرم فهذا المقطع يكافئ قاعدة ده لان النسبة بين قاعدتى اب و ده كالنسبة بين مربعى اع و دف نصفى قطريهما (١١ مقالة ٤) أو كالنسبة بين مربعى س ع و س ف ارتفاعيهما فكانت نسبة مثلثى و رح و ى ك ل كالنسبة بين مربعى الارتفاعين المرقومين (١٥ مقالة ٦) وبهذا تكون النسبة بين دائرتى اب و ده كنسبة مثلثى و رح و ى ك ل لكن قد فرض التكافؤ بين مثلث و رح ودائرة اب فمثلث ى ك ل ايضا يكافئ دائرة ده ومن المعلوم ان المساحة الجسمية للهرم تكافئ مساحة المخروط وذلك لتكافؤ قواعدهما لان المساحة الجسمية من مخروط س ا ب هى حاصل ضرب قاعدة اب فى مقدار ١/٣ س ع والمساحة الجسمية من هرم ط و رح هى حاصل ضرب قاعدة و رح فى مقدار ١/٣ س ع وبمثل هذا يثبت ان يكون هرم ط ى ك ل مكافئا لمخروط س ده فصار جسم مخروط اده ب الناقص مكافئا لجسم هرم و رح ى ك ل الناقص الآخر لكن قاعدة و رح تكافئ الدائرة التى نصف قطرها اع ومساحتها ط × اع٢ وكذلك تصير قاعدة ى ك ل =

ط

ط × $\overline{\text{دف}}^{2}$ ولما كان مقدار ط × اع × دف وسطا متناسبا بين مقداري ط × $\overline{\text{اع}}^{2}$ و ط × $\overline{\text{دف}}^{2}$ كانت المساحة الجسمية للهرم أو المخروط الناقص $\frac{1}{3}$ ع ف × (ط × $\overline{\text{اع}}^{2}$ + ط × $\overline{\text{دف}}^{2}$ + ط × اع × دف) (٢١ مقالة ٦) اعني $\frac{1}{3}$ ط × ف ع × ($\overline{\text{اع}}^{2}$ + $\overline{\text{دف}}^{2}$ + اع × دف) وهو عين ما تقدم

(الدعوى السابعة النظرية)

السطح المحدب من المخروط مساو لحاصل ضرب محيط قاعدته في نصف ضلعه أي في نصف الخط الواصل

(شكل ٢٥٩) اذا كان اع نصف قطر قاعدة المخروط و س رأسه و س ا ضلعه فسطحه المحدب يصير محيط اع × $\frac{1}{2}$ س ا

لانه لو قيل انه يمكن ان يكون ذلك مساحة لسطح المخروط الذي رأسه أيضا في نقطة س ونصف قطر قاعدته أكبر من ع ا نحو ع ب ورسم م ن ف ط كثير الاضلاع المنتظم على الدائرة الصغيرة وهو لا يلاقي المحيط الذي نصف قطره ع ب يحدث هرم س م ن ف ط المنتظم بان يكون كثير الاضلاع المذكور قاعدته ونقطة س رأسه فمساحة مثلث س م ن أحد المثلثات التي يتركب منها محدب الهرم هي حاصل ضرب قاعدة م ن في نصف ارتفاع س ا وهو ضلع المخروط المفروض وهذا الارتفاع مساو لما في س ن ف و س ف ك الى آخر سائر المثلثات الاخر من ارتفاع فظهر ان تكون مساحة محدب الهرم مساوية لحاصل ضرب دور م ن ف ط م في مقدار $\frac{1}{2}$ س ا فصار محدب الهرم المذكور اكبر من حاصل ضرب محيط ع ا × $\frac{1}{2}$ س ا حيث كان دور م ن ف ط م اكبر من محيط اع فلزم ان يكون اكبر من محدب المخروط الذي رأسه س ونصف قطر قاعدته ع ب وهذا مستحيل لانه لو صار تطبيق هذا الهرم على هرم يساويه وهذا المخروط على مخروط يساويه القاعدة للقاعد

لكان سطح المخروطين ا كبر من سطح الهرمين لاحاطته به من كل جهة (فائدة ٢) وهذا الخلف ناشئ عما افرضنا فكان محالا ومن ثمة لا يمكن ان يكون حاصل ضرب محيط ع ا × $\frac{1}{2}$ س ا مساحة لمحدب مخروط ا كبر من محدب المخروط المفروض

ثانيا ان ذلك الحاصل لا يكون مساحة أيضا لمحدب مخروط أصغر منه لانه اذا كان ع ب نصف قطر قاعدة المخروط المفروض وفرض حاصل ضرب محيط ع ب × $\frac{1}{2}$ س ب سطح المحدب للمخروط الذى رأسه س ونصف قطر قاعدته ا ع الاصغر من ع ب واجرى العمل كما تقدم لا يزال سطح هرم س م ن ف ط مساويا للحاصل ضرب دور م ن ف ط فى مقدار $\frac{1}{2}$ س ا ومن كون دور م ن ف ط اصغر من محيط ب ع فضلا عن كون س ا اصغر من س ب فعلى هذه البراهين المتضاعفة التأكيد يصير محدب الهرم اصغر من حاصل ضرب محيط ب ع × $\frac{1}{2}$ س ب وقد فرض ان هذا الحاصل مساحة لسطح محدب المخروط الذى نصف قطر قاعدته ع ا فلزم ان يكون سطح الهرم المرقوم اصغر من سطح المخروط المرسوم داخله وهذا من قبيل المحال فتبين ان حاصل ضرب محيط قاعدة مخروط فى نصف ضلعه لا يكون أيضا مساحة محدب مخروط أصغر منه والحاصل انه ثبت المطلوب من ان يكون حاصل ضرب محيط القاعدة فى نصف الخط الواصل يساوى محدب المخروط المفروض

تنبيه اذا كان ضلع المخروط ل ونصف قطر القاعدة ر وكان محيط قاعدته ٢ ط ر فسطح محدبه يساوى ٢ ط ر × $\frac{1}{2}$ ل أو ط ر ل

(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ١٦١) السطح المحدب من ا د هـ ب المخروط الناقص يساوى حاصل ضرب ضلع ا د فى نصف مجموع محيطى قاعدتيه ا ب و د هـ

فيرسم خط ا و عمودا على س ا فى مستوى س ا ب المار بمحور س ع ومساويا للمحيط الذى نصف قطره ا ع ويوصل س و ويرسم أيضا د ح موازيا لخط ا و فلمشابهة مثلثى س ا ع و س د ح يكون ا ع : د ح :: س ا :

سد ولوجود المشابهة ايضا بين مثلثى سا و و سدع يصير او : دع :: سا : سد ولتشابه النسب يصير او : دع :: اع : دح أو :: محيط اع : محيط دح (١١ مقالة ٤) ومن كون او = محيط اع بالعمل يصير دع = محيط دح اذا علت ذلك فقدار او × $\frac{1}{2}$ سا يكون مساحة لمثلث سا و ومساويا لسطح مخروط سا‍ب الذى كان مقدار مساحته محيط اع × $\frac{1}{2}$ سا وكذلك يثبت ان يكون مثلث سدع مساويا السطح مخروط سده فلذا يكون سطح مخروط اده‍ب الناقص مساويا لسطح ادعو شبه المنحرف وحيث كانت مساحة شبه المنحرف اد × $\left(\frac{او + دع}{٢}\right)$ ثبت المطلوب من ان يكون سطح مخروط اده‍ب الناقص مساويا لحاصل ضرب ضلع اد فى نصف مجموع محيطى قاعدتيه

نتيجة اذا رسم طك من نقطة ط وسط ضلع اد موازيا للخط اب وطم موازيا للخط او فعلى ما صرح به آنفا يثبت ان يكون طم = محيط طك لكن من كون شبه منحرف ادعو = اد × طم = اد × محيط طك يجب ان يكون السطح المحدب من المخروط الناقص مساويا لحاصل ضرب ضلعه فى محيط القطع المنشا متساوى الابعاد بين قاعدتيه وبذلك يمكن التعبير عنه

تنبيه اذا أدير خط اد الموضوع فى احد طرفى حع الموجود فى مستويه حول الخط المرقوم مرة واحدة فمساحة السطح الحاصل من دوران ذلك الخط يكون اد × $\frac{\text{محيط اع} + \text{محيط دح}}{٢}$ أو اد × محيط طك

وحينئذ خطوط اع و دح و طك تكون عمادا نازلة من نهايتى خط اد ووسطه على محور حع لانه اذا مد خطا اد و عح حتى التقيا فى نقطة س فلا جرم ان السطح المرسوم بخط اد هو سطح المخروط الناقص الذى كان عا و دح نصفى قطرى قاعدتيه * ووجود رأس المخروط الكامل فى نقطة س غير خفى وهذا السطح هو المساحة التى سبق ذكرها

واما اذا وقعت نقطة د على نقطة س وحدث مخروط كامل أو أنشئت

اسطوانة بجعل خط اد موازيا للمحور فلا تزال المساحة كما تقدم لكن فى الحال الاولى ينعدم دح اصلا وفى الحال الثانية يصير مساويا لخط اع ولخط طه أيضا

(الدعوى التاسعة الفائدة)

(شكل ٢٦٢) اذا كان اب و بح و حد اضلاعا متوالية من كثير اضلاع منتظم و ع مركزه و عب نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وفرض تدوير ابحد قسم كثير الاضلاع الموضوع فى أحد طرفى قطر ورا مرة واحدة حوله فالمساحة السطحية الحاصلة من دورانه تكون من × محيط عب وارتفاع هذا السطح هو من اعنى القسم المحصور من المحور بين عمودى ام و دن

فاذا كانت نقطة ب وسط ضلع اب وكان بك هو العمود النازل من نقطة ب على المحور فساحة السطح المرسوم بضلع اب تكون اب × محيط بك (٨) ويرسم اس موازيا للمحور ولوجود المشابهة فى مثلثى اسب و عبك لتعامد اضلاعهما على وجه التناظر اعنى ان عب عمود على اب و بك على اس و عك على سب تصير اب : اس أو مة :: عب : بك أو :: محيط عب : محيط بك فلذا صار اب × محيط بك = مة × محيط عب فعلم ان مساحة السطح المرسوم بضلع اب تساوى حاصل ضرب ارتفاعه مة فى محيط الدائرة المرسومة داخله

وكذلك السطح المرسوم بضلع بح يكون = ةف × محيط عب والمرسوم بضلع حد = فن × محيط عب فصارت مساحة السطح الحاصل بدوران قسم كثير الاضلاع ابحد هكذا (م ة + ةف + فن) × محيط عب او × من × محيط عب وبذلك يثبت المطلوب من ان تكون مساحة السطح المرسوم بذلك القسم هى حاصل ضرب ارتفاعه فى محيط الدائرة المرسومة داخله

نتيجة اذا كان كثير الاضلاع المنتظم كاملا وعدد اضلاعه زوجيا ومحور ود مارا برأسي و و د المتقابلتين فالسطح المرسوم بتدوير و ا ح د نصف كثير الاضلاع حول المحور المرقوم يساوى حاصل ضرب محور ود فى محيط الدائرة المرسومة داخله وحينئذ يعتبر محور ود قطرا للدائرة المرسومة فوقه

* (الدعوى العاشرة النظريه) *

سطح الكرة يساوى حاصل ضرب قطرها فى محيط دائرة عظيمة من دوائرها

بيان ذلك اولا ان حاصل ضرب قطر الكرة فى محيط دائرة عظيمة لا يكون مساحة لسطح كرة اكبر منها

(شكل ٢٦٣) لانه لو قيل انه يمكن ان يكون ا ب × محيط ا ح مساحة للكرة التى نصف قطرها ح ى ورسم كثير اضلاع منتظم عدد اضلاعه زوج على الدائرة التى نصف قطرها ح ا بحيث لا يلاقى محيط الدائرة التى نصف قطرها ح ى كانت نقطتا م و س رأسين متقابلين فى كثير الاضلاع فاذا دور م ف س نصف كثير الاضلاع حول قطر م س فمساحة السطح الحادث من دورانه تكون م س × محيط ا ح (٩) لكن من حيث ان خط م س أ كبر من قطر ا ب فالسطح المرسوم بكثير الاضلاع يكون اكبر من حاصل ا ب × محيط ا ح فلزم ان يكون اكبر من سطح الكرة التى نصف قطرها ح ى وهذا خلف لان سطح الكرة اكبر من السطح المرسوم بكثير الاضلاع لان سطح الكرة أحاط به من كل جانب واشتمل عليه فتبين ان حاصل ضرب قطر الكرة فى محيط دائرتها العظيمة لا يمكن ان يكون مساحة لسطح كرة اكبر منها

وثانيا ان ذلك الحاصل لا يكون مساحة لسطح كرة أصغر منها * فلو قيل انه يمكن ان يكون حاصل ى هـ × محيط ح ى مساحة سطح الكرة التى نصف قطرها ح ا وأجرى العمل كما سبق فى الحالة الاولى لا يزال سطح الجسم الناتج من كثير الاضلاع مساويا للحاصل م س × محيط ح ا لكن من حيث ان خط م س اصغر من قطر ى هـ ومحيط ا ح أيضا اصغر من محيط ى ح يصير هذان برهانين على ان يكون سطح الجسم المرسوم بكثير الاضلاع اصغر من حاصل ى هـ

× محيط ح ى ولاجل هذا لزم ان يكون أصغر من سطح الكرة التى نصف قطرها اح وهذا محال لان كثير الاضلاع سطحه احاط بالكرة من كل جانب فكان السطح المرسوم بكثير الاضلاع اكبر من سطح الكرة ومن ثمة تبين انه لا يمكن ان يكون حاصل ضرب قطر الكرة التى نصف قطرها ح ا فى محيط دائرتها العظيمة مساحة لسطح كرة اصغر منها وبهذا ثبت المطلوب من ان تكون مساحة سطح الكرة مساوية لحاصل ضرب قطرها فى محيط دائرة عظيمة من دوائرها

نتيجة حيث كانت مساحة سطح الدائرة العظيمة مساوية لحاصل ضرب محيطها فى نصف نصف القطر او ربع القطر فكانت مساحة سطح الكرة قدر أربعة أمثال سطح الدائرة العظيمة

تنبيه حيث تعين سطح الكرة بالسطوح المستوية يكون تعيين القيمة المطلقة من الشقق والمثلثات الكروية سهلا ونسبة كل منهما الى سطح الكرة الكامل على ما سيأتى

بيان ذلك اولا ان الشقة التى زاويتها ا نسبتها الى سطح الكرة كنسبة زاوية ا الى أربع قوائم (٢٠ مقالة ٧) أو كنسبة القوس العظيم الذى هو مقدار زاوية ا الى محيط الدائرة العظيمة لكن حيث ان مساحة سطح الكرة مساوية لحاصل ضرب قطرها فى محيط دائرتها العظيمة فساحة سطح الشقة يساوى حاصل ضرب القوس الذى هو مقدار زاوية الشقة فى قطر الكرة

وثانيا مساحة سطح كل مثلث كروى تكافئ الشقة التى زاويتها تساوى نصف التفاضل بين القائمتين وبين مجموع الزوايا الثلاث من ذلك المثلث (٢٣ مقالة ٧) مثلا اذا كان ف و ك و ر الاقواس العظام التى هى مقادير الزوايا الثلاث من المثلث و م محيط دائرة عظيمة و ن قطرها فالمثلث الكروى يكافئ الشقة التى مقدار زاويتها $\frac{ف+ك+ر-\frac{1}{2}م}{2}$ فلذا صارت مساحتها $ن\times\frac{ف+ك+ر-\frac{1}{2}م}{2}$

وكذلك المثلث القائم الزوايا الثلاث كل من أقواسه ف و ك و ر الثلاثة يساوى مقدار $\frac{1}{4}$ م ومجموعها يساوى $\frac{3}{4}$ م وحيث ان تفاضل هذا المقدار ونصف م هو $\frac{1}{4}$ م يكون نصف هذه الفضلة $=\frac{1}{8}$ م ومن أجل هذا

كانت مساحة المثلث القائم الزوايا الثلاث $= \frac{1}{8}$ م × ں وهو ثمن سطح الكرة

واما سطح كثير الاضلاع الكروى فيتبع المثلث من غير واسطة فضلا عن تعيين مساحته كما فى الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة السابعة حيث كان المثلث القائم الزوايا الثلاث هناك احد اللمساحة والآن جعل على نسق المستوى

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

سطح منطقة الكرة مساو لحاصل ضرب ارتفاعها فى محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٦٩) فاذا كان هو قوسا اكبر او اصغر من ربع المحيط و رو هو العمود النازل على نصف قطر هج فمساحة المنطقة ذات القاعدة المرسومة بتدوير قوس هو حول هج تكون هر × محيط هج

بيان ذلك أولا أنه اذا فرض ان مقدار مساحة هذه المنطقة أصغر منه مثلا بان قيل انه لا يمكن ان يكون حاصل هر × محيط جا مساحتها ورسم جزء كثير الاضلاع هم ع ف و داخل قوس هو على أن لا يلاقى المحيط الذى نصف قطره جا وانزل عمود جے على هم يكون هر × محيط جے مقدار مساحة السطح الحادث من تدوير كثير الاضلاع هم و حول جه (٩) وحيث ان هذا المقدار اكبر من مقدار هر × محيط اج وقد فرض انه مساحة للمنطقة المرسومة بقوس هو لزم ان يكون السطح المرسوم بكثير الاضلاع هم ع ف و اكبر من السطح المرسوم فوقه بقوس هو وهذا محال * لان السطح الاخير احاط بالسطح الاول من كل جهة فهو اكبر منه ومن ثمة علم ان مساحة كل منطقة ذات قاعدة واحدة لا تكون أصغر من حاصل ضرب ارتفاع تلك المنطقة فى محيط الدائرة العظيمة

ثانيا ان مساحة تلك المنطقة لا تكون ايضا اكبر من حاصل ضرب ارتفاعها بمحيط الدائرة العظيمة فيفرض انها المرسومة بدوران قوس ا ـ حول اج وانه يمكن ان تكون منطقة ا ـ > حاصل اد × محيط اج فاقول سطح

الكرة الكامل مركب من منطقتي اب و بح ومساحته اح × محيط اح (١٠) او اء × محيط اح + ءح × محيط اح فاذا كانت منطقة اب > اء × محيط اح نظرا للتعادل يلزم ان تكون منطقة بح < ءح × محيط اح وهذا محال كما صرح به في الضرب الاول من هذه الدعوى فوضح ان مساحة المنطقة ذات القاعدة لا تكون اكبر من حاصل ضرب ارتفاعها بمحيط دائرة عظيمة

والمعنى انه قد تبين ان مساحة كل منطقة ذات قاعدة واحدة تساوى حاصل ضرب ارتفاعها في محيط الدائرة العظيمة

(شكل ٢٢٠) واما المنطقة ذات القاعدتين فمثلا اذا جعلت المنطقة المفروضة انها الحادثة من تدوير قوس وغ حول قطر ده وانزل عمودا وع و حك فلا جرم ان المنطقة المرسومة بقوس وح هي التفاضل بين المنطقتين المرسومتين بقوسى دح و دو وحيث ان مساحتيهما دك × محيط حد و دع × محيط حد فكانت مساحتها (دك — دع) × محيط حد او ع ك × محيط حد ومن ثمة ثبت المطلوب على آكد وجه من ان تكون مساحة كل منطقة تساوى حاصل ضرب ارتفاعها في محيط الدائرة العظيمة سواء كانت ذات قاعدة واحدة أو ذات قاعدتين

نتيجة نسبة المنطقتين المعينتين على كرة واحدة أو كرات متساوية كنسبة ارتفاعيهما ونسبة المنطقة الى سطح الكرة كنسبة ارتفاع تلك المنطقة الى القطر

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

(شكل ٢٦٤ و ٢٦٥) مثلث باح ومستطيل بحهو المتحدا القاعدة والارتفاع اذا ادير امعا حول قاعدة بح المشتركة فالجسم الحادث من دوران المثلث يكون ثلث الاسطوانة الحاصلة من دوران المستطيل

(شكل ٢٦٤) اذا انزل عمود اء على المحور فالمخروط المرسوم بمثلث ابء ثلث الاسطوانة المرسومة بمستطيل اوبء (٥) وكذلك المخروط المرسوم بمثلث اءح ثلث الاسطوانة المرسومة بمستطيل اءحه فظهر ان مجموع

المخروطين أو الجسم المرسوم بمثلث ا ب ح يكون ثلث مجموع الاسطوانتين
او الجسم المرسوم بمستطيل ب ح هو
(شكل ٢٦٥) واذا وقع عمود اد خارج المثلث فالجسم المرسوم بمثلث ا ب ح
هو التفاضل بين المخروطين المرسومين بمثلثي ا ب د و ا ح د وحينئذ تكون
الاسطوانة المرسومة بمستطيل ب ح هو تفاضل الاسطوانتين المرسومتين
بمستطيلي ا و ب د و ا هـ ح د فلذا علم انه لا يزال الجسم الحادث من دوران
المثلث ثلث الاسطوانة الحادثة من دوران المستطيل المتحدين قاعدة وارتفاعا
وثبت المطلوب

تنبيه مساحة سطح الدائرة التي نصف قطرها اد هي $ط \times \overline{اد}^{٢}$ فحاصل ط
$\times \overline{اد}^{٢} \times$ ب ح يكون مساحة جسم الاسطوانة المرسومة بمستطيل
ب ح هو و $\frac{١}{٣}$ ط $\times \overline{اد}^{٢} \times$ ب ح مساحة الجسم المرسوم بمثلث ا ب ح

(الدعوى الثالثة عشرة العملية)

(شكل ٢٦٦) طريق استخراج مساحة الجسم الحاصل من دوران مثلث
ب ا ح على رأسه ح حول خط ح د المرسوم كيفما كان خارجا عن ذلك
المثلث

فيمتد ضلع ا ب حتى يلاقي محور ح د في نقطة د وينزل عمودا ا م و ب ن
من نقطتي ا و ب على المحور

فالجسم المرسوم بمثلث ح ا د يكون $\frac{١}{٣}$ ط $\times \overline{ام}^{٢} \times$ ح د (١٢) والجسم
المرسوم بمثلث ح ب د يكون $\frac{١}{٣}$ ط $\times \overline{ب ن}^{٢} \times$ ح د فتفاضل هذين
الجسمين أو الجسم المرسوم بمثلث ا ب ح يكون $\frac{١}{٣}$ ط $\times (\overline{ام}^{٢} - \overline{ب ن}^{٢})$
$\times$ ح د وقد يمكن التعبير عن ذلك بصورة أخرى فأقول اذا أنزل عمود ى ق على
ح د من نقطة ى وسط ا ب ورسم ب ع من نقطة ب موازيا لخط ح د

فتصير ام + بن = ٢ بق (٧ مقالة ٣) وحيث ان ام ـ بن = اع

فلذا صار (ام + بن) × (ام ـ بن) او ام^{٢} ـ بن^{٢} = ٢ بق × اع

(١٠ مقالة ٣) فتختصر مساحة ذلك الجسم فى تعبير $\frac{٢}{٣}$ ط × بق × اع

× حد لكن اذا انزل عمود حف على اب فتشابه مثلثى ابع

و دحف يتاتى منه هذا التناسب اع : حف :: اب : حد ولذا يصير

اع × حد = حف × اب ومن كون حاصل حف × اب ضعف

مساحة مثلث ابح ايضا اع × حد تساوى ٢ ابح ومن ثمة كان

الجسم المرسوم بمثلث ابح $\frac{٤}{٣}$ ط × ابح × بق او عين ذلك ابح

× $\frac{٢}{٣}$ محيط بق (ذلك بان كان محيط بق = ٢ ط × بق) فعلم ان

مساحة الجسم المرسوم بدوران مثلث ابح مساو لحاصل ضرب مساحته

بثلثى المحيط المرسوم من نقطة ب وسط قاعدته

(نتيجة) (شكل ٢٦٧) اذا كان ضلع اح = حب فخط حب يصير عمودا على

اب ومساحة مثلث ابح تساوى حاصل اب × $\frac{١}{٢}$ حب ومساحته

الجسمية $\frac{٤}{٣}$ ط × ابح × بق تؤول الى $\frac{٢}{٣}$ ط × اب × بق

× حب ولوجود التشابه بين مثلثى ابع و حبق يتاتى هذا التناسب

اب : بع او من :: حب : بق ومن هذا صار اب × بق

= من × حب فتبين ان مساحة الجسم المرسوم بمثلث ابح المتساوى

الساقين تكون $\frac{٢}{٣}$ ط × من × حب^{٢}

تنبيه حل هذا المطلب يوهم انه مبنى على كون ضلع اب اذا امتد يلاقى المحور

ولكن اذا كان خط اب المرقوم موازيا للمحور فما نتج منها لا يزال كذلك

(شكل ٢٦٨) واما المساحة الجسمية للاسطوانة المرسومة بمستطيل امنب

فهى ط × ام^{٢} × من ومساحة الجسم المرسوم بمثلث احم فهى $\frac{١}{٣}$ ط ×

ام^{٢} × مح فمساحة جسم المخروط المرسوم بمثلث بحن = $\frac{١}{٣}$ ط × ام^{٢} × حن

فاذا جمع الجسمان الاولان وحذف الثالث يبقى $ط \times \overline{ام}^{2} \times (مد + \frac{1}{3} حم - \frac{1}{3} حد)$ وهو مساحة الجسم مثلث ا ـ ح ومن كون حد ـ حم = م د يجرى ذلك القدر مجرى $ط \times \overline{ام}^{2} \times \frac{2}{3} مد$ او $\frac{2}{3} ط \times \overline{حف}^{2} \times مد$ وينحصر فيه ولا بجوم ان هذا موافق لنتائج ما تقدم

(الدعوى الرابعة عشرة النظرية)

(شكل ٢٦٢) اذا كانت ا ـ و ـ ح و حد المتعددة المتوالية اضلاعا لكثير اضلاع منتظم و ع مركزه و ع ـ نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وتصور تدوير اع د قطاع كثير الاضلاع الموضوع فى احد طرفى قطر ود حوله فساحة الجسم الحاصل من دورانه تكون $\frac{2}{3} ط \times \overline{ع ـ}^{2} \times م ن$ و م ن هو جزء المحور المحدود بنهايتى عمودى ام و د ن ولانتظام كثير الاضلاع كانت كافة مثلثات اع ـ و ـ ع ح الخ متساوية ومتساوية الساقين فعلى ما صرح به فى نتيجة الدعوى المتقدمة صارت مساحة الجسم الحاصل من دوران مثلث اع ـ المتساوى الساقين $\frac{2}{3} ط \times \overline{ع ـ}^{2} \times م د$ ومساحة الجسم المرسوم بمثلث ـ ع ح $\frac{2}{3} ط \times \overline{ع ـ}^{2} \times د ف$ وايضا مساحة الجسم المرسوم بمثلث ح ع د $\frac{2}{3} ط \times \overline{ع ـ}^{2} \times ف ن$ فلذا صار مجموع هذه الاجسام اعنى مساحة الجسم المرسوم بشكل اع د قطاع كثير الاضلاع $\frac{2}{3} ط \times \overline{ع ـ}^{2} \times (م د + د ف + ف ن)$ او $\frac{2}{3} ط \times \overline{ع ـ}^{2} \times م ن$ وثبت المطلوب

(الدعوى الخامسة عشرة النظرية)*

كافة القطاع الكروية مساحتها الجسمية تساوى حاصل ضرب المنطقة التى تكون قاعدة لها فى ثلث نصف القطر والمساحة الجسمية من الكرة الكاملة تساوى حاصل ضرب سطحها المستدير فى ثلث نصف قطرها

(شكل ٢٦٩) حيث يرسم القطاع الكروى بدوران ا ب ح قطاع الدائرة حول ا ح ومساحة المنطقة المرسومة بقوس ا ب هى ا ى × محيط ا ح او ٢ ط × ا ح × ا ى (١١) فمساحة جسم القطاع الكروى مساوية لحاصل ضرب هذه المنطقة فى ١/٣ ا ح اعنى ٢/٣ ط × ا ح^٢ × ا ى

اولا ان قيل انه يمكن ان يفرض مقدار ٢/٣ ط × ا ح^٢ × ا ى مساحة جسم قطاع كروى اكبر منه مثلا اذا فرض مساحة لجسم القطاع الكروى المرسوم بشكل هـ ح و قطاع الدائرة المشابه لقطاع ا ب ح فيرسم جزء كثير الاضلاع هـ م ن و المنتظم داخل قوس هـ و واضلاعه لاتلاقى قوس ا ب ثم اذا تصور دوران هـ ن و ح قطاع كثير الاضلاع و هـ ح و قطاع الدائرة فى آن واحد حول هـ ح وكان ح ب نصف قطر الدائرة المرسومة داخل كثير الاضلاع وكان و ر عمودا نازلا على هـ ح فالجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع تكون مساحته ٢/٣ ط × ح ب^٢ × هـ ر (١٤) فيكون بعد ح ب اكبر من ا ح بالعمل و هـ ر ايضا اكبر من ا ى لانه اذا وصل ا ب و هـ و فالمثلثان الحادثان هـ و ر و ا ب ى يكونان متشابهين فمن ذلك يحصل هذا التناسب هـ ر : ا ى :: و ر : ب ى :: ح و : ح ب فظهر ان يكون هـ ر > ا ى

وعلى مقتضى هذه الادلة المكررة يكون حاصل ٢/٣ ط × ب ح^٢ × هـ ر اكبر من حاصل ٢/٣ ط × ا ح^٢ × ا ى فالحاصل الاول هو الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع والثانى هو المرسوم بقطاع الدائرة هـ ح و وهو المفروض مساحة لجسم القطاع الكروى فلذا الزم ان يكون الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع اكبر مما كان مرسوما بقطاع الدائرة وهذا محال حيث كان ذلك الجسم محويا داخل القطاع الكروى فهو اصغر منه ومن ثمة تبين استحالة ان يكون حاصل ضرب المنطقة التى هى قاعدة القطاع الكروى فى ثلث القطر مساحة لجسم قطاع كروى اكبر منه

ثانيا لايمكن ان يكون ذلك القدر مساحة لجسم قطاع كروى دون ذلك * لانه اذا
كان القطاع الكروى المعلوم حاصلا من دوران حه و قطاع الدائرة وفرض
امكان كون حاصل $\frac{٢}{٣}$ ط × $\overline{\text{حه}}^{٢}$ × هر مساحة جسم قطاع كروى اصغر منه
مثلا اذا كان مساحة لجسم القطاع الكروى الناشئ عن دوران ا حـ ب قطاع
الدائرة فاقول يبقى العمل المتقدم على حاله فلا يزال مساحة الجسم المرسوم بقطاع
كثير الاضلاع $\frac{٢}{٣}$ ط × $\overline{\text{حـ ى}}^{٢}$ × هر لكن بعد حـ ى اصغر من حه فلذا
صارت مساحة الجسم المرقوم اصغر من حاصل $\frac{٢}{٣}$ ط × $\overline{\text{حه}}^{٢}$ × هر وهو ما فرض
مساحة للقطاع الكروى المرسوم بقطاع الدائرة ا حـ ب فعلى هذا لزم ان يكون
الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع اصغر من جسم القطاع الكروى المرسوم
بقطاع ا حـ ب وهذا اكبر محال * حيث كان القطاع الكروى محويا فى الجسم
المرقوم ومن ثمة ظهر ان حاصل ضرب منطقة القطاع الكروى فى ثلث نصف القطر
لايكون مساحة ايضا لجسم قطاع كروى اصغر من المفروض

والحاصل ان مساحة جسم كافة القطاعات الكروية تساوى حاصل ضرب المنطقة
التى تكون قاعدة له فى ثلث نصف القطر

واما اذا عظم ا حـ ب قطاع الدائرة حتى بلغ مقدار نصفها فالقطاع المرسوم
بدورانه يصير كرة كاملة فعلى ما صرح به فى هذه الدعوى يثبت المطلوب من ان
تكون مساحة جسم الكرة مساوية لحاصل ضرب مساحة سطحها المستدير
فى ثلث نصف قطرها

نتيجة حيث ان نسبة سطوح الكرات كنسبة مربعات انصاف اقطارها كانت
نسبة حواصل ضرب هذه السطوح فى نصف القطر كنسبة مكعبات انصاف
اقطارها فصارت النسبة بين جسمى الكرتين كالنسبة بين مكعبى نصفى قطريهما
او كنسبة مكعبى قطريهما

(تنبيه) اذا كان ر نصف قطر كرة فسطحها المستدير ٤ ط ر^{٢} ومساحة
جسمها ٤ ط ر^{٢} × $\frac{١}{٣}$ ر او $\frac{٤}{٣}$ ط ر^{٣} واذا كان قطرها الكامل ق يصير

ر = $\frac{1}{2}$ ق و ر^{3} = $\frac{1}{8}$ ق^{3} فنقول مساحتها الجسمية الى $\frac{4}{3}$ ط × $\frac{1}{8}$ ق^{3}
او $\frac{1}{6}$ ط ق^{3}

(الدعوى السادسة عشرة النظرية)

نسبة سطح الكرة الى مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها (قاعدتا الاسطوانة داخل هذا المجموع) كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ والنسبة بين هذين الجسمين ايضا كذلك

(شكل ٢٧٠) اذا كان م ف ه ك دائرة عظيمة فى الكرة و ا ب ح د المربع المرسوم عليها وأدير ف م ك نصف الدائرة و ف ا د ك نصف المربع معا حول قطر ف ك فنصف الدائرة يرسم الكرة ونصف المربع يرسم الاسطوانة المرسومة فوق تلك الكرة

اقول ان ا د ارتفاع هذه الاسطوانة مساو لقطر الكرة ف ك وقاعدة الاسطوانة تساوي دائرة عظيمة * لان قطر ا ب مساو قطر م ه فلذا كان السطح المحدب من الاسطوانة مساويا لحاصل ضرب محيط الدائرة العظيمة بقطرها (٤) وهذه المساحة هى عين مساحة سطح الكرة (١٠) ومن هذا تبين ان سطح الكرة مساو لمحدب الاسطوانة المرسومة عليها

لكن حيث ثبت ان سطح الكرة مساو لاربع دوائر عظام فكان محدب الاسطوانة المرسومة عليها مساويا لاربع دوائر عظام فاذا زيد على هذا مقدار القاعدتين اعنى الدائرتين العظيمتين يصير مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها مساويا لست دوائر عظام ومن ثمة كانت نسبة سطح الكرة الى مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها كنسبة عدد ٤ الى عدد ٦ او كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ وهذا ما اردنا اثباته وبه صار الشق الاول من هذه الدعوى مسلما

واما الشق الثانى فاقول حيث كانت قاعدة الاسطوانة المرسومة فوق الكرة مساوية لدائرة عظيمة وارتفاعها مساويا لقطرها صارت المساحة الجسمية من الاسطوانة مساوية لحاصل ضرب دائرة عظيمة فى قطرها لكن مساحة جسم الكرة

مساوية لحاصل ضرب اربع دوائر عظام فى ثلث نصف القطر (١٥) يعنى حاصل ضرب دائرة عظيمة فى أربعة اثلاث نصف القطر او $\frac{٢}{٣}$ القطر فلذا كانت نسبة الكرة الى الاسطوانة المرسومة عليها كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين جسامة هذين الجسمين كنسبة سطحيهما

(تنبيه) اذا تصور كثير القواعد على ان تماس بجميع وجوهه الكرة فيمكن النظر اليه بان يكون مركبا من اهرام قد اجتمعت رؤسها فى مركز الكرة ووجوه كثير القواعد المتعددة صارت لها قواعد ولا يخفى ان الارتفاع المشترك فى كافة تلك الاهرام هو نصف قطر الكرة فلذا كان كل هرم منها يساوى حاصل ضرب الوجه الذى صار قاعدة له فى ثلث القطر فالمساحة الجسمية من كثير القواعد الكامل تساوى حاصل ضرب سطحه فى ثلث نصف قطر الكرة المرسومة داخلا ويرى من هذا ان نسبة المساحة الجسمية من كثيرى القواعد المرسومة فوق الكرة كنسبة سطوحها ومن اجل ذلك ظهر ان ما ثبت فى حق الاسطوانة المرسومة على الكرة يثبت ايضا فى الاجسام المتعددة الاخر

وكذلك اشير فى هذا الباب الى ان نسبة سطوح الكثير الاضلاع المرسومة فوق الدائرة كنسبة اطرافها يعنى ادوارها

(الدعوى السابعة عشرة العملية)

(شكل ٢٧١) طريق استخراج قيمة الجسم الحاصل من دوران د م ب قطعة الدائرة مرة واحدة حول قطر خارج عنها

اذا انزل عمودا ب ه و د و على المحور وعمود ح ى من مركز ح على وتر ب د ورسم نصف قطر ح ب و ح د فالجسم المرسوم بقطاع ب ح ا = $\frac{٢}{٣}$ ط × حب^{٢} × اه (١٥) والمرسوم بقطاع د ح ا = $\frac{٢}{٣}$ ط × حب^{٢} × او فلذا كان تفاضل هذين الجسمين اعنى المرسوم بقطاع ح ب = $\frac{٢}{٣}$ ط × حب^{٢} × (او — اه) = $\frac{٢}{٣}$ ط × حب^{٢} ه و

ولكن من كون مساحة الجسم المرسوم بمثلث د ح ب المتساوى الساقين $= \frac{2}{3}$ ط × ح ب^2 × هـ و (١٤) صار الجسم المرسوم بقطعة ب م د $= \frac{2}{3}$ ط × هـ و × (ح ب^2 — ح ب^2) ويكون فى مثلث ح ب ب القائم الزاوية ح ب^2 — ح ب^2 $=$ ب ب^2 $= \frac{1}{4}$ ب د^2 فلذا كان الجسم المرسوم بقطعة ب م د هو $\frac{2}{3}$ ط × هـ و × $\frac{1}{4}$ ب د^2 او $\frac{1}{6}$ ط × ب د^2 × هـ و وثبت المطلوب

(تنبيه) نسبة الجسم المرسوم بقطعة ب م د الى الكرة التى قطرها ب د كنسبة $\frac{1}{6}$ ط × ب د^2 × هـ و الى $\frac{1}{6}$ ط × ب د^3 او كنسبة هـ و الى ب د

(الدعوى الثامنة عشرة النظرية)

كافة القطع الكروية المحصورة بين المستويين المتوازيين مساحتها الجسمية تساوى مجموع حاصل ضرب ارتفاعها فى نصف مجموع قاعدتيها ومساحة جسم الكرة التى قطرها هو الارتفاع المرقوم

(شكل ٢٧١) اذا كان ب هـ و د و نصفى قطرى قاعدتى القطعة وادير تلك القطعة حول و هـ محور ساحة ب م د و هـ المدورة على ان يكون هـ و ارتفاعها فالجسم الحادث من قطعة ب م د $= \frac{1}{6}$ ط × ب د^2 × هـ و (١٧) وبما ان جسم المخروط الناقص المرسوم بشبه منحرف ب د و هـ $= \frac{1}{3}$ ط × هـ و × (ب هـ^2 + د و^2 + ب هـ × د و) (٦) فصارت قطعة الكرة التى هى مجموع هذين الجسمين $= \frac{1}{6}$ ط × هـ و × (٢ ب هـ^2 + ٢ د و^2 + ب هـ × ب و + د ب^2) لكن اذا رسم ب ع موازيا لخط هـ و يصير د ع = د و — ب هـ و د ع^2 = د و^2 — ٢ د و × ب هـ + ب هـ^2 (٩ مقالة ٣) من اجل ذلك يكون ب د^2 =

$$\text{سع}^2 + \text{دع}^2 = \text{هو}^2 + \text{دو}^2 - ٢\,\text{دو} \times \text{سه} + \text{سه}^2$$

فاذا وضع هذا المقدار مقام مربع سد^2 في العبارة الدالة على ما يساوي القطعة وحذف ما يلزم حذفه تصير المساحة الجسمية لتلك القطعة $\frac{1}{6}\,\text{ط} \times \text{هو} \times (٣\,\text{سه}^2 + ٣\,\text{دو}^2 + \text{هو}^2)$ وهذه العبارة تنقسم الى قسمين احدهما ان يكون $\frac{1}{6}\,\text{ط} \times \text{هو} \times (٣\,\text{سه}^2 + ٣\,\text{دو}^2)$ او $\text{هو} \times \left(\frac{\text{ط} \times \text{سه}^2 + \text{ط} \times \text{دو}^2}{2}\right)$ وهو نصف مجموع القاعدتين مضروبا في الارتفاع والآخر ان يكون $\frac{1}{6}\,\text{ط} \times \text{هو}^3$ اعني الكرة التي قطرها هو (تنبيه ١٥) ومن ثم ثبت المطلوب من ان تكون مساحة كل قطعة تساوي ما صرح به في رأس الدعوى

نتيجة اذا فقدت احدى القاعدتين تصير القطعة حينئذ ذات قاعدة واحدة فقط فلذا كان جسم كافة القطع الكروية ذات القاعدة يكافئ مجموع نصف الاسطوانة التي تصد القطعة بها قاعدة وارتفاعا والكرة التي قطرها ارتفاع تلك القطعة

(تنبيه عمومي)

اذا كان س نصف قطر قاعدة اسطوانة و ع ارتفاعها فمساحة جسمها تكون $\text{ط}\,\text{س}^2 \times \text{ع}$ او $\text{ط}\,\text{س}^2\,\text{ع}$

واذا كان س نصف قطر قاعدة مخروط و ع ارتفاعه فمساحة جسمه تكون $\text{ط}\,\text{س}^2 \times \frac{1}{3}\,\text{ع}$ او $\frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{س}^2\,\text{ع}$

واذا كان ا و ب نصفي قطري قاعدتي مخروط ناقص و ع ارتفاعه فمساحة جسمه $\frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{ع} \times (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{اب})$

واذا كان س نصف قطر كرة فمساحة جسمها $\frac{4}{3}\,\text{ط}\,\text{س}^3$

واذا كان س نصف قطر قطاع كروي و ع ارتفاع المنطقة التي هي قاعدته

فساحة جسمه تكون $\frac{٢}{٣}$ ط س^{٢} ع

واذا كان ف و ك قاعدتى قطعة كروية و ع ارتفاعها فساحتها الجسمية $(\frac{ف + ك}{٢}) \times ع + \frac{١}{٦}$ ع^{٣}

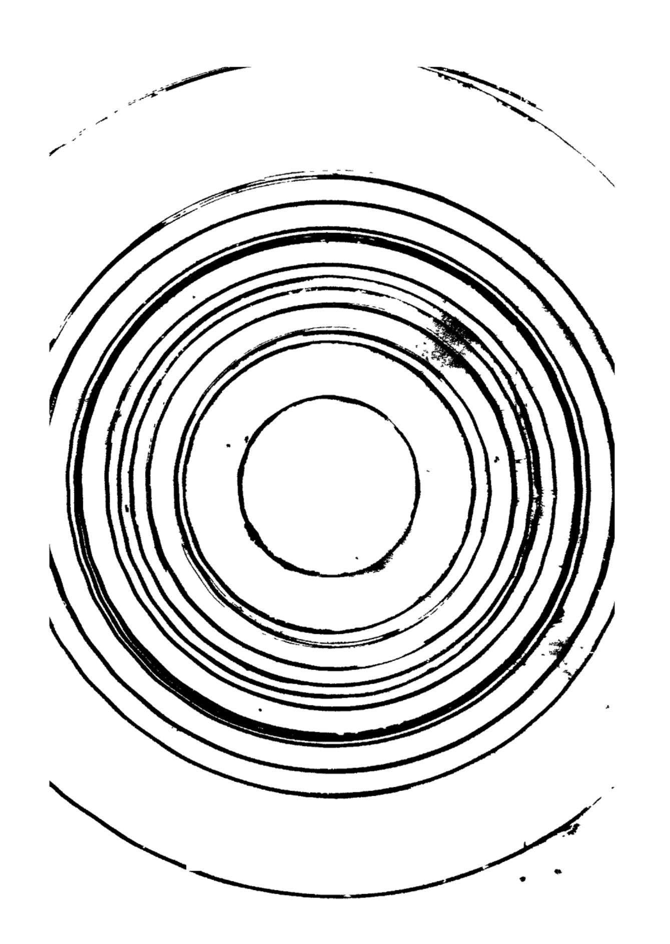
واذا كانت القطعة الكروية ذات قاعدة واحدة فقط وسميت ف فساحة جسمها $\frac{١}{٢}$ ف ع + $\frac{١}{٦}$ ط ع^{٢} وهذا آخر ترجمة

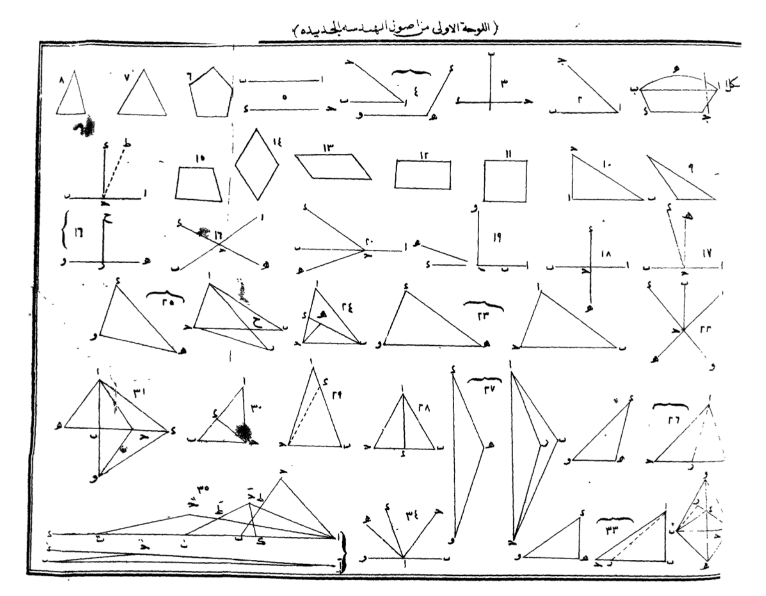
بعد حمد الله على آلائه والصلاة والسلام على خاتم انبيائه يقول راجى غفران الاوزار ابراهيم الدسوقى الملقب بعبد الغفار شيخ التصحيح بدار الطباعه أعانه الله على مشاق هذه الصناعه

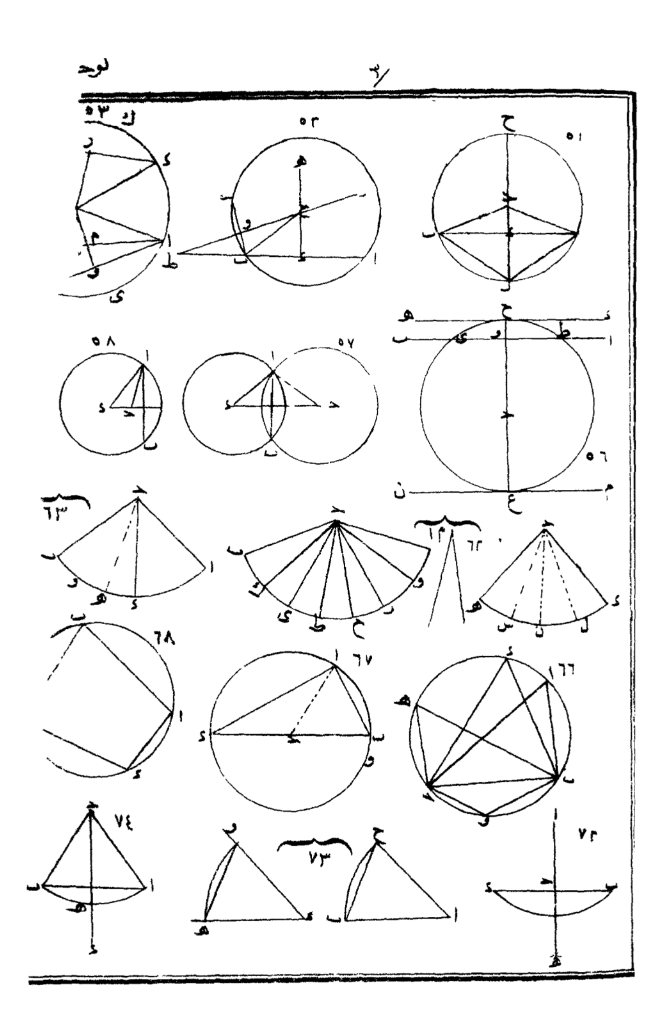
تم بعون الملك الوهاب طبع هذا الكتاب المستطاب طبعة ثالثة مستدركة ما فرط فيه من حادثه مقابلا على أصله الذى كان طبع عليه من وقت ان ترجمه حضرة عصمت أفندى عن التركية الى العربيه مع حضرة أحد خوجات المدارس على أفندى عزت بدون تصرف الا فى مبحث الخطوط المتوازية بالمطبعة العامرة الزاهية الزاهرة المتوفرة دواعى مجدها المشرقة كواكب سعدها فى ظل من تعطرت الافواه بثنائه وبلغ من كل وصف جميل حد انتهائه ومحا ظلم الظلم بسنا صورته القمرية واثبت مراسم العدل بحسن سيرته العمرية واسبل على أهل مملكته غيوث انعامه واحسانه وشملهم بعظيم رأفته وامتنانه عزيز الديار المصرية وحامى حمى حوزتها النيلية جناب الخديوى ذى الفخر الجلى اسمعيل ابن ابراهيم بن محمد على أدام الله علينا ايامه ونشر على هام الخافقين أعلامه واطال عمر انجاله الكرام وحرسهم بعينه التى لا تنام لاسيما الوزير الشهير النبيل الاصيل ذى المجد الاثيل والشرف الجليل ورب المعارف المشهورة والعوارف المشكورة والرشد والاصابة والدولة والنجابة من هو بالمحاسن الثناء حقيق سعادة محمد باشا توفيق أكبر انجال الحضرة الخديوية وولى عهد الحكومة المصرية لازالت الايام مضيئة بشمس علاه والليالى منيرة ببدر حلاه وكان طبعه الميمون وحسن تمثيله المصون مشمولا بادارة من عليه أحاسن اخلاقه

تنفى سعادة حسين بك حسنى مدير المطبعة والكاغدخانه اعلى الله قدره وشانه
ونظارة وكيله السالك جادة سبيله من لم يزل ابمرة ذكائه يحيى حضرة
محمد أفندى حسنى وملاحظة ذى الرأى المسدد حضرة أبى
العينين أفندى أحمد وكان الفراغ من طبعه ونشر نفعه
فى أوائل ثانى الربيعين من سنة تسع وثمانين وألف
ومائتين من هجرة نبينا عليه الصلاة والسلام
وعلى آله وأصحابه الكرام مالاح
بدر تمام وفاح مسك
ختام آمين

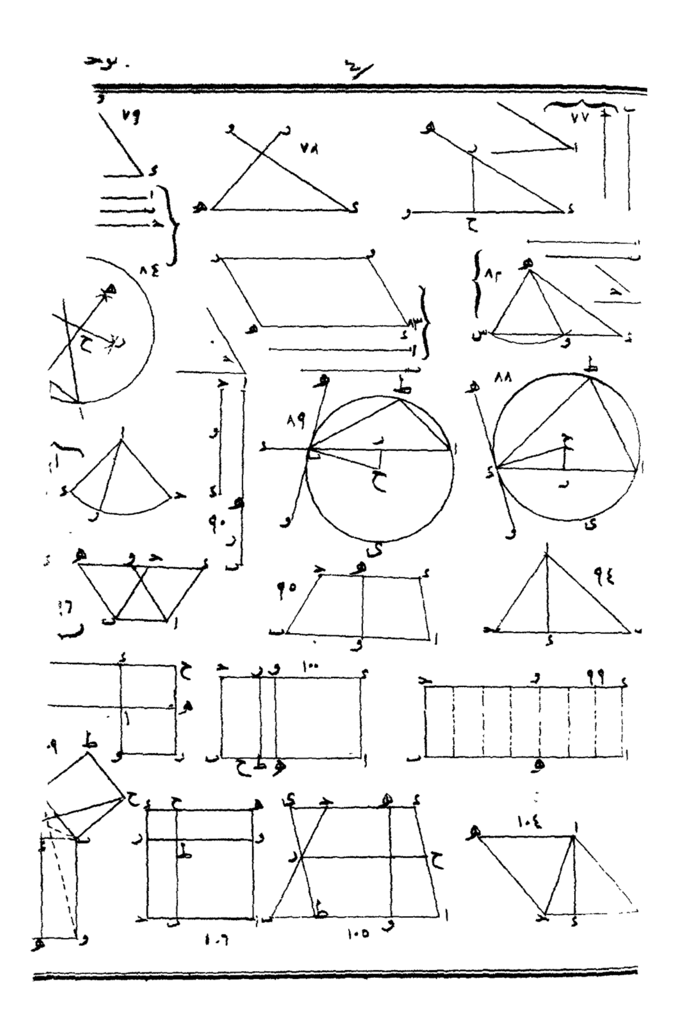
تم

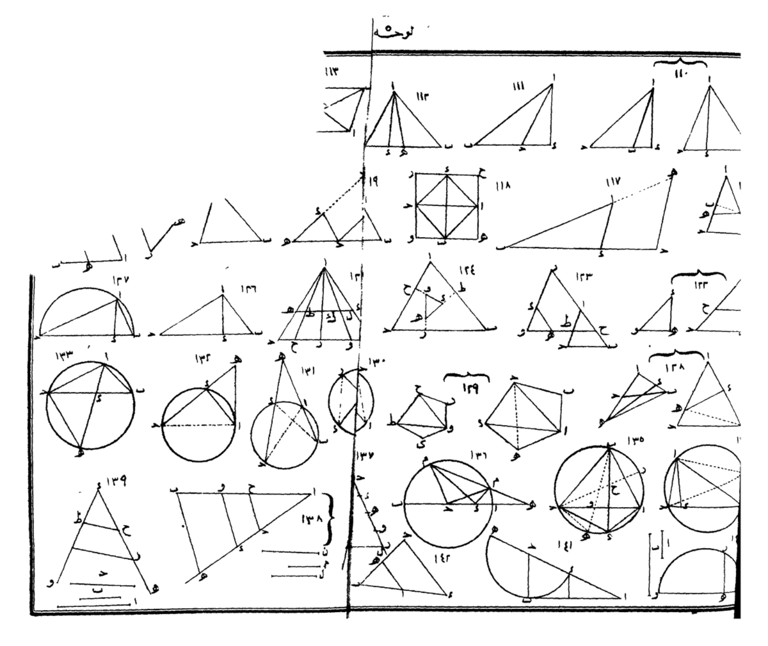


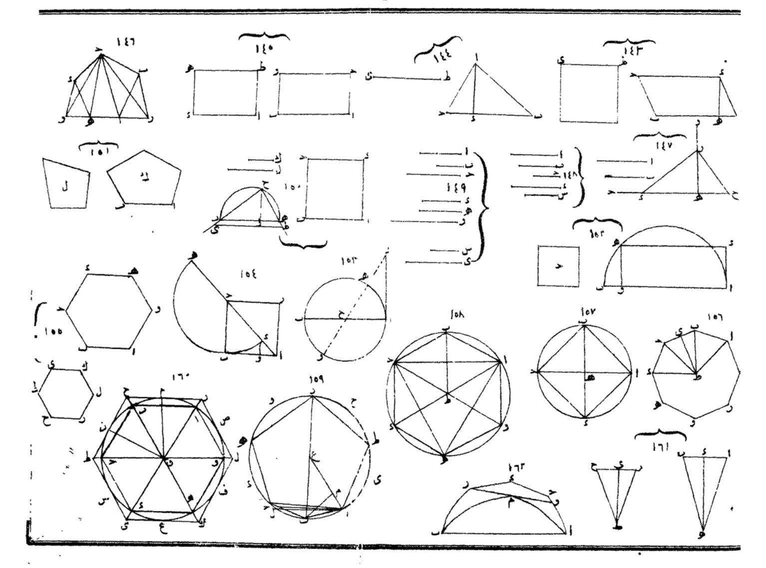


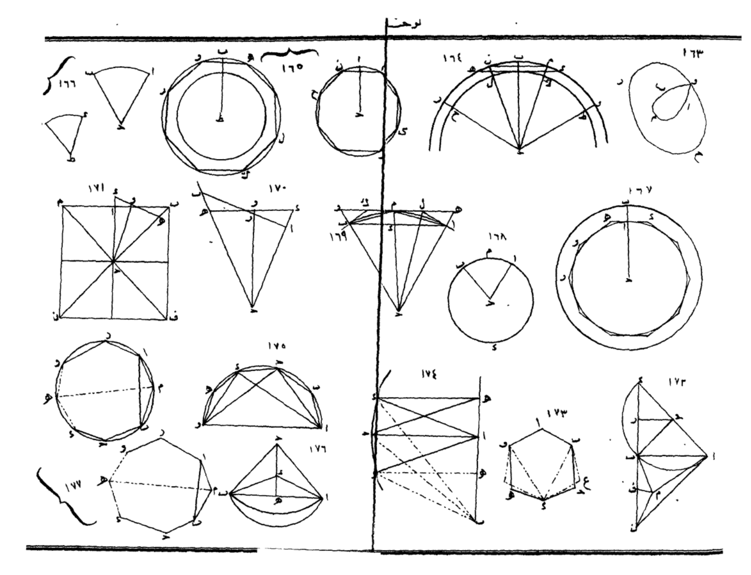


لوحه
٣
٥١
٥٢
٥٣
٥٦
٥٧
٥٨
٦٢
٦٣
٦٦
٦٧
٦٨
٧٢
٧٣
٧٤

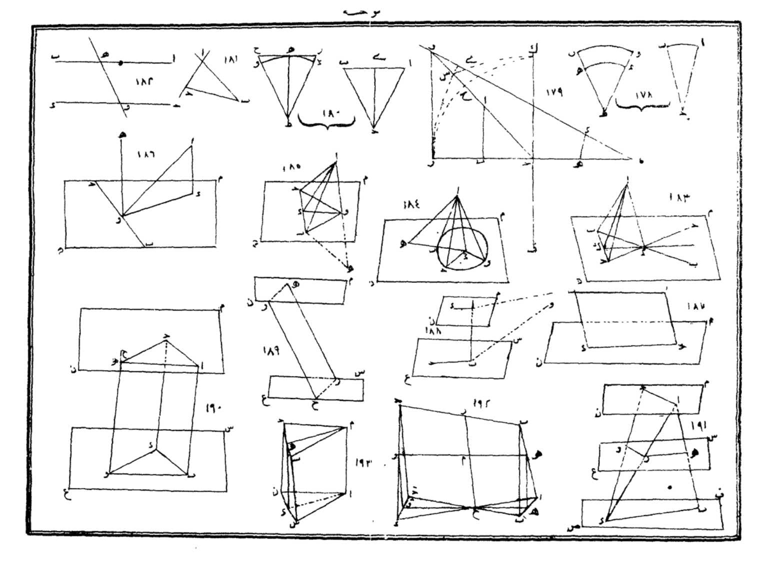

٧٧
٧٨
٧٩
٨٤
٨٣
٨٨
٨٩
٩٠
٩٤
٩٥
٩٩
١٠٠
١٠٤
١٠٥
١٠٦


١١٠
١١١
١١٢
١١٣
١١٧
١١٨
١١٩
١٢٢
١٢٣
١٢٤
١٢٥
١٢٦
١٢٧
١٢٨
١٢٩
١٣٠
١٣١
١٣٢
١٣٣
١٣٥
١٣٦
١٣٧
١٣٨
١٣٩
١٤١
١٤٢

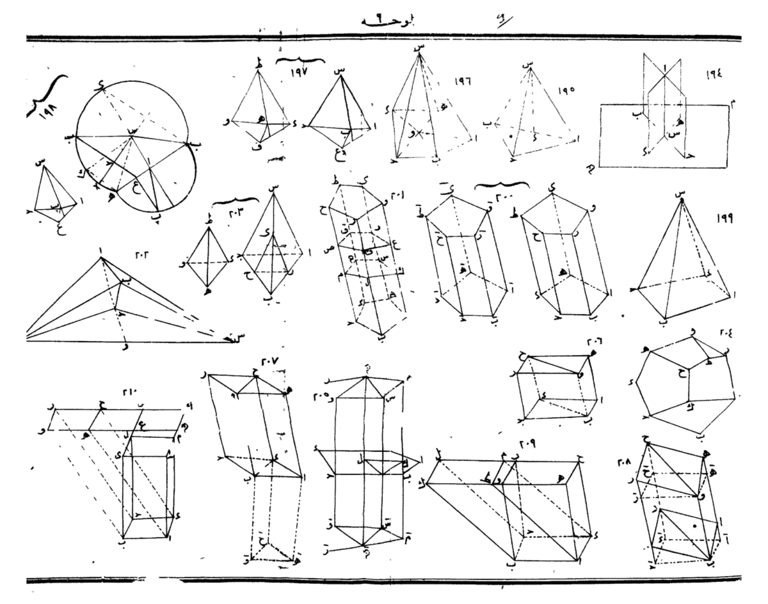




لوحـ
١٦٣
١٦٤
١٦٥
١٦٦
١٦٧
١٦٨
١٦٩
١٧٠
١٧١
١٧٢
١٧٣
١٧٤
١٧٥
١٧٦
١٧٧



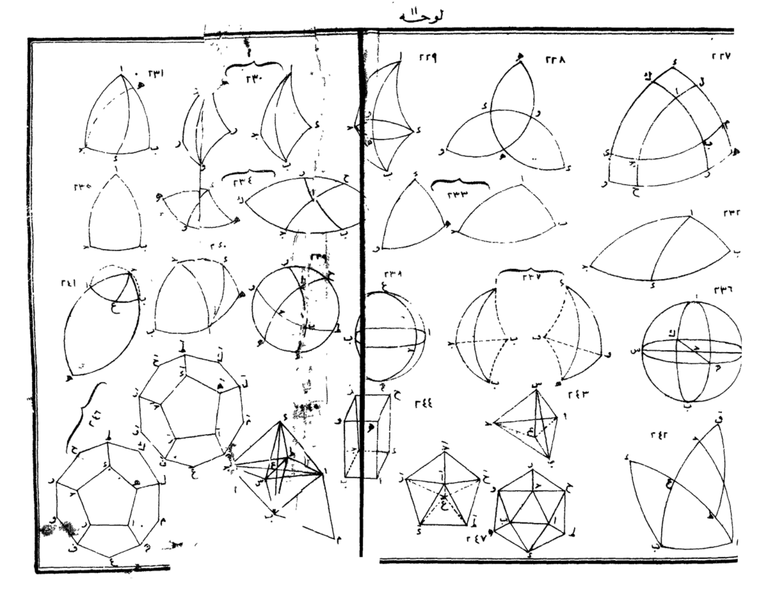
لوحه
١٧٨
١٧٩
١٨٠
١٨١
١٨٢
١٨٣
١٨٤
١٨٥
١٨٦
١٨٧
١٨٨
١٨٩
١٩٠
١٩١
١٩٢
١٩٣



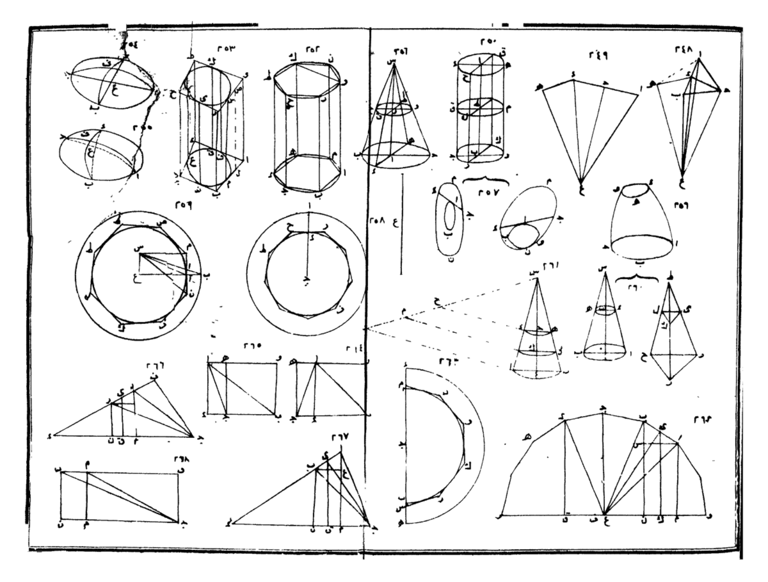
لوحة ٩
١٩٤
١٩٥
١٩٦
١٩٧
١٩٨
١٩٩
٢٠٠
٢٠١
٢٠٢
٢٠٣
٢٠٤
٢٠٥
٢٠٦
٢٠٧
٢٠٨
٢٠٩
٢١٠

لوحة

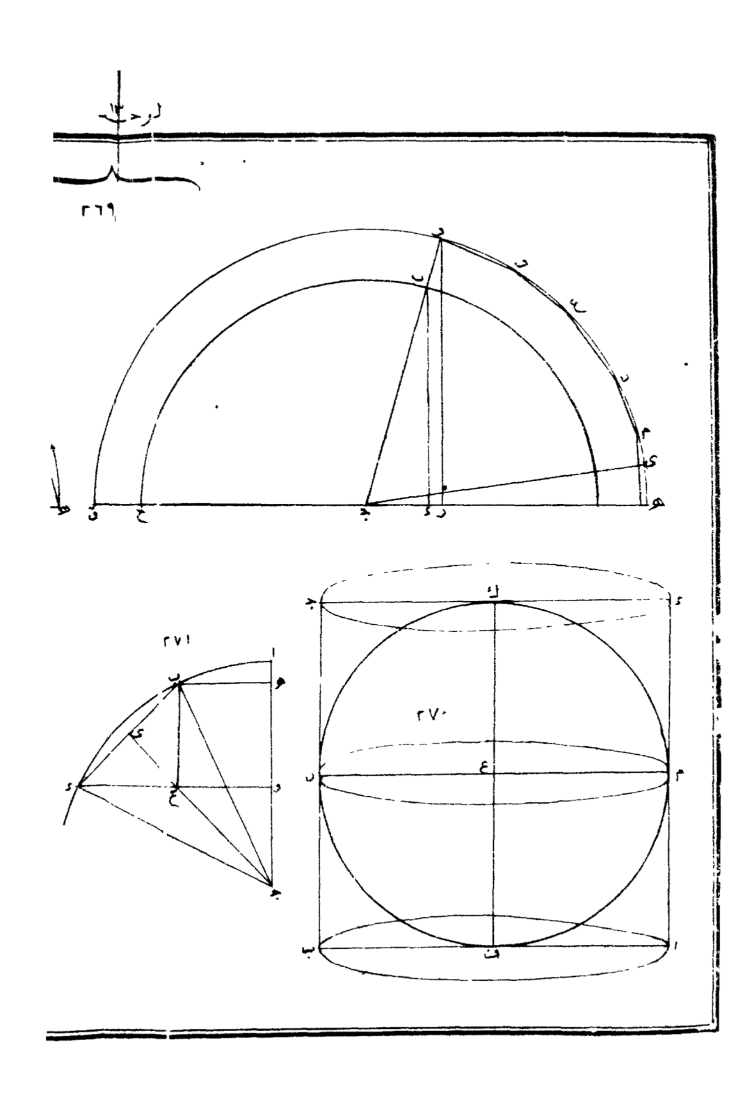
لوحة ١١



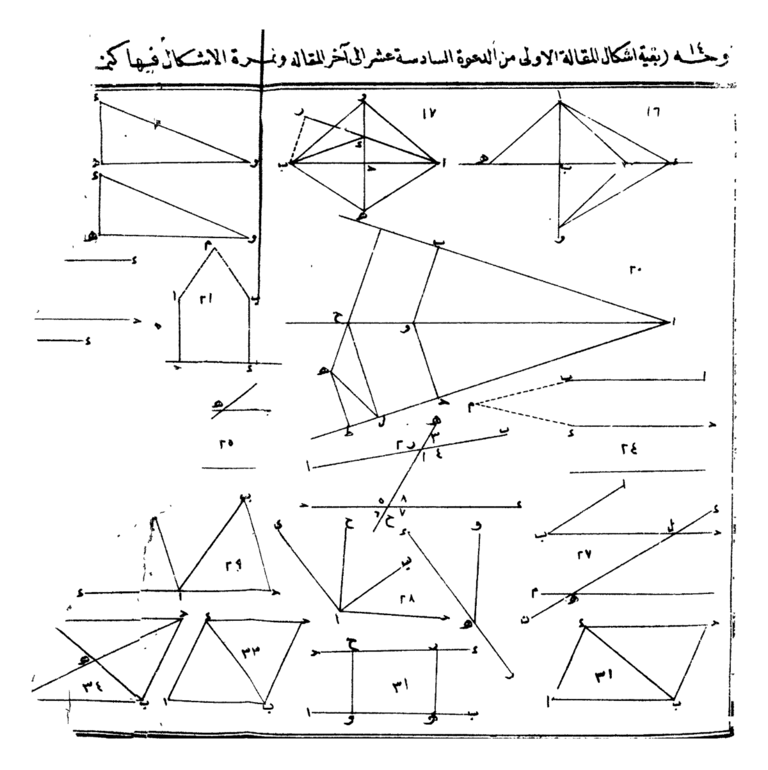
٢٢٧
٢٢٨
٢٢٩
٢٣٠
٢٣١
٢٣٢
٢٣٣
٢٣٤
٢٣٥
٢٣٦
٢٣٧
٢٣٨
٢٣٩
٢٤٠
٢٤١
٢٤٢
٢٤٣
٢٤٤
٢٤٦
٢٤٧



٢٤٨
٢٤٩
٢٥٠
٢٥١
٢٥٢
٢٥٣
٢٥٤
٢٥٥
٢٥٦
٢٥٧
٢٥٨
٢٥٩
٢٦٠
٢٦١
٢٦٣
٢٦٤
٢٦٥
٢٦٦
٢٦٧
٢٦٨


٢٦٩
٢٧٠
٢٧١

وجـه ١٤ (بقية اشكال المقالة الاولى من الدعوة السادسة عشر الى آخر المقالة ونمرة الاشكال فيها كنم




Bibliotheca Alexandrina
04174621